6174の不思議について*

On the Wonder of 6174

酒井政雄[1)]
Masao SAKAI

1.　6174の不思議とその一般化

任意の4桁の10進数をとる。例えば1981をとって，つぎのようにして新しい数をつくる。1981を表わす4数字を大きいものから順に並べかえた数9811と，小さいものから順に並べかえた数1189との差を求めると8622となる。この8622について同様な差を求め，以下同様のことを繰り返えしていくと

1981→8622→6354→3087→8352→6174

ただし3087については 8730－0378＝8352 とする。

この例のように，どんな4桁の10進数をとっても，同様の差を何回も繰り返えすとつねに6174に帰着する。ただし0000，1111，2222，……，9999のみは例外である。これを〝6174の不思議〞という。

このことについて加納幹雄氏が，次のことを証明された。(文献〔1〕)

n進m桁の自然数xについて，上記の差をxの最大最小差といい $T(x)$ と記す。ただしn，$m\geqq 2$とする。xからr回同様の差をとったものを$T^r(x)$と記し，数列：

x，$T(x)$，$T^2(x)$，…，$T^r(x)$，………

が収束するとき，すなわちあるrについて$T^r(x)=T^{r+1}(x)=\cdots$となるとき，収束値$T^r(x)$をxの収束値という。0000，1111，……，$(n\text{-}1)(n\text{-}1)(n\text{-}1)(n\text{-}1)$ の例外を除いて，どんなxをとっても，つねに収束値が存在し，しかもその値が一定の値v $(\neq 0)$ であるとき，このvを最大最小差変換の核という。

定　理1　2桁の場合は最大最小差変換の核は存在しない。

定　理2　3桁の場合は，偶数進法なら最大最小差変換の核が存在し，奇数進法なら存在しない。

補定理3　4桁の場合で，$n=2,3,4$なら核は存在しない。

補定理4　4桁で$n\geqq 5$の場合は，もし核が存在するなら$n\equiv 0 \pmod 5$であり，$n=5r$とすれば核は

$$(3r)(r-1)(4r-1)(2r) \tag{1}$$

である。

補定理5　4桁の場合で，核が存在するなら$n\neq 0$ (mod 15, 25, 35, 55, 65, 85) である。

定　理6　4桁の場合で，$n\leqq 1000$については5, 10, 40, 80, 640進法のときに限り，最大最小差変換の核が存在する。

以上のことにより，次のことを予想された。(文献〔1〕)

補定理7　4桁の場合で $n\neq 5\times 2^t$ $(t=0,1,2,\cdots\cdots)$ のときは核は存在しない。

補定理8　4桁の場合で $n=5\times 4^t$ $(t=1,2,\cdots\cdots)$ のときは収束値$(3r)(r-1)(4r-1)(2r)$以外にループがあって，核は存在しない。なおループは唯一つしかない。

定　理9　4桁の場合には，$n=5$または $n=10\times 4^t$ $(t=0,1,2,\cdots\cdots)$ のときに限り核が存在する。

本稿でこの予想の補定理7，8および定理9を証明したい。

---

*昭和56年2月2日　原稿受理

1)　大阪産業大学教養部

2. 記号および記法

文字はすべてことわりのないかぎり0または正の整数を表わすものとする。$abcd$ は n 進法の4桁の数をあらわし，$0\leqq a, b, c, d<n$ である。$abcd$ について $a=b=c=d$ の場合は除外する。すなわち $abcd$ を並べかえて $a'b'c'd'$，$a'\geqq b'\geqq c'\geqq d'$ とするとき $a'>d'$ とする。1桁，2桁，3桁の数 a，ab，abc 等は $000a$，$00ab$，$0abc$ 等として4桁の数とみなす。$abcd$ に対して，並べかえて $a'b'c'd'$，$a'\geqq b'\geqq c'\geqq d'$ とし，差 $a'b'c'd'-d'c'b'a'$ を $abcd$ の最大最小差といい，これを $T(abcd)$ と記す。

［1］ $a\geqq b\geqq c\geqq d$ $(a>d)$ について $b>c$ なら

$$T(abcd)=(a-d)(b-c-1)(n-b+c-1)(n-a+d)$$

$b=c$ なら

$$T(abcd)=(a-d-1)(n-1)(n-1)(n-a+d)$$

［2］ $a'\geqq b'$ $(a'>0)$ のとき，$b'>0$ なら

$$T(a'b'00)=(a')(b'-1)(n-b'-1)(n-a')$$

$b'=0$ なら

$$T(a'b'00)=(a'-1)(n-1)(n-1)(n-a')$$

［3］ $a\geqq b\geqq c\geqq d(a>d)$ に対し $a'=a-d$，$b'=b-c$ とすると

$$T(abcd)=T(a'b'00)$$

（証明） $a>d$ より $a'=a-d>0$，$b>c$ なら $b'=b-c>0$，$b=c$ なら $b'=0$ なので［1］と［2］を比較して $T(abcd)=T(a'b'00)$ となる。 （おわり）

今後 $abcd$ は $0\leqq a, b, c, d<n$ とし，$a=b=c=d$ を除く。とくに今後 $abcd$，$a\geqq b\geqq c\geqq d$ のときは $a>d, a'b'00$，$a'\geqq b'$ では $a'>0$ とことわることを省く。

4桁の数 x を並べかえて $abcd$，$a\geqq b\geqq c\geqq d$ とし，$a'=a-d$，$b'=b-c$ としたとき，$a'b'00$ を $U(x)$ と記す。$T(U(x))$ を $TU(x)$，$U(T(x))$ を $UT(x)$ 等を記す。

とくに $UT(x)=U(T(x))$ を $V(x)$，$V(x)=y$ のとき $x\Rightarrow y$ と記す。4桁の数 x に変換 V を $r(r\geqq 1)$ 回作用させたとき $V^r(x)$ と記す。

［4］ 4桁の数 x と $r=1,2,3\cdots\cdots$ に対して

$$T(x)=TU(x),\ T^2(x)=TVU(x),\cdots\cdots,\ T^{r+1}(x)=TV^rU(x),\cdots\cdots \tag{2}$$

$$UT(x)=VU(x),\ UT^2(x)=V^2U(x),\cdots\cdots,\ UT^r(x)=V^rU(x),\cdots\cdots \tag{3}$$

（証明） x を並べかえて $abcd$，$a\geqq b\geqq c\geqq d$ とすると $T(x)=T(abcd)$，一方［3］により $T(abcd)=TU(x)$ よって $T(x)=TU(x)$ である。$T^2(x)=(TU)^2(x)=TUTU(x)=TVU(x)$，$T^3(x)=(TU)^3(x)=TUTUTU(x)=TV^2U(x)$．同様にして $T^{r+1}(x)=TV^rU(x)$ を得る。

$UT(x)=UTU(x)=VU(x)$，$UT^2(x)=U(TU)^2(x)=UTUTU(x)=V^2U(x)$，
$UT^3(x)=U(TU)^3(x)=UTUTUTU(x)=V^3U(x)$，同様にして $UT^r(x)=V^rU(x)$ を得る。

（おわり）

［5］ 数列：

$$x,\ T(x),\ T^2(x),\cdots\cdots,\ T^r(x),\cdots\cdots \tag{4}$$

が収束するための必要十分条件はある r について $T^{r+1}(x)=T^r(x)$ が成立することである。これは $T^r(x)=abcd$ とすると $T(abcd)=abcd$ となることであり，収束値は $T^r(x)=abcd$ である。

（文献〔1〕）

［6］ 数列(4)が収束するための必要十分条件は $U(x)=y$ についての数列：

$$y,\ V(y),\ V^2(y),\cdots\cdots,\ V^r(y)\cdots\cdots \tag{5}$$

にて，ある r について $V^{r+1}(y)=V^r(y)$ が成立することである。これは $V^r(y)=a'b'00$ とすると $V(a'b'00)=a'b'00$ となることであり，(4)の収束値は $TV^r(y)=T(a'b'00)$ である。

（証明）　数列(4)が収束するとき，［5］により，あるrについて $T^{r+1}(x)=T^{r}(x)$ が成立する。よって $UT^{r+1}(x)=UT^{r}(x)$，(3)により$V^{r+1}U(x)=V^{r}U(x)$，$U(x)=y$ なので $V^{r+1}(y)=V^{r}(y)$。(4)の収束値は［5］により $T^{r+1}(x)=T^{r}(x)$ であるが，(2)によって $T^{r+1}(x)=TV^{r}U(x)=TV^{r}(y)$である。逆に(5)が収束するとき，ある$r$について$V^{r}(y)=V^{r+1}(y)$が成立する。(2)により $T^{r+1}(x)=TV^{r}(y)$，$T^{r+2}(x)=TV^{r+1}(y)$ なので $T^{r+1}(x)=T^{r+2}(x)$ が成立する。よって数列(4)は $T^{r+1}(x)$ に収束する。収束値は $T^{r+1}(x)=TV^{r}(y)$ である。　（おわり）

n進法4桁の数xについて，数列(4)が収束するとき，(4)の収束値をxの収束値という。$U(x)\neq 0$ であるすべてのxについて数列(4)が同じ値に収束するとき，この収束値がn進法の核である。$abcd$があるxの収束値であるための必要十分条件は［5］により $T(abcd)=abcd$ である。［6］により

［7］ $abcd(0\leqq a,b,c,d<n)$があるxの収束値であるための必要十分条件は $U(abcd)=a'b'00$ について $V(a'b'00)=a'b'00$ となることである。$V(a'b'00)=a'b'00(a'\geqq b'\geqq 0,\ a'>0)$ のとき収束値 $abcd$ は $T(a'b'00)=abcd$ で求められる。

［8］ $a\geqq b$ のとき $V(ab00)=a'b'00$ とすれば

$a>b>0$ のとき

1° $a+b>n,\ 2b\geqq n$ なら $a'=2a-n,\ b'=2b-n$

2° $a+b>n,\ 2b<n$ なら $a'=2a-n,\ b'=n-2b$

3° $a+b=n$ なら $a'=a-b+1,\ b'=a-b-1$

4° $a+b<n,\ 2a\geqq n$ なら $a'=n-2b,\ b'=2a-n$

5° $a+b<n,\ 2a<n$ なら $a'=n-2b,\ b'=n-2a$

$a=b>0$ のとき

6° $2a>n$ なら $a'=2a-n+1,\ b'=2a-n-1$

7° $2a=n$ なら $a'=1,\ b'=1$

8° $2a=n-1$ なら $a'=2,\ b'=0$

9° $2a<n-1$ なら $a'=n-2a+1,\ b'=n-2a-1$

$a>b=0$ のとき

10° $2a>n$ なら $a'=a-1,\ b'=n-a$

11° $2a\geqq n$ なら $a'=n-a,\ b'=a-1$

（証明）

$a>b>0$ のとき $T(ab00)=(a)(b-1)(n-b-1)(n-a)$

$a>b$ により $a>b-1,\ n-b>n-a$ よって $n-b-1\geqq n-a$

1° $a+b>2b\geqq n$ なら，$(b-1)-(n-b-1)=2b-n\geqq 0$ なので $a>b-1\geqq n-b-1\geqq n-a$ よって $a'=a-(n-a)=2a-n,\ b'=(b-1)-(n-b-1)=2b-n$

2° $a+b>n>2b$ なら $a-(n-b-1)=a+b-n+1>0,\ (n-b-1)-(b-1)=n-2b>0$，また $a+b>n$ により $a+b-1\geqq n$ よって $(b-1)-(n-a)=a+b-1-n\geqq 0$ すなわち $a>n-b-1>b-1\geqq n-a$ よって $a'=a-(n-a)=2a-n,\ b'=(n-b-1)-(b-1)=n-2b$

3° $a+b=n$ なら $a-(n-b-1)=a+b-n+1=1>0,\ (n-a)-(b-1)=n-(a+b)+1=1>0$ により $a>n-b-1\geqq n-a>b-1$ よって $a'=a-(b-1)=a-b+1(=a-(n-a)+1=2a-n+1)$，$b'=(n-b-1)-(n-a)=a-b-1(=a-(n-a)-1=2a-n-1)$

4° $2a\geqq n>a+b$ なら $n-(a+b)>0$ より $n-(a+b)\geqq 1,\ (n-b-1)-a=n-(a+b)-1\geqq 0$，$a-(n-a)=2a-n\geqq 0,\ (n-a)-(b-1)=n-(a+b)+1>1>0$ よって $n-b-1\geqq a\geqq n-a>b-1$。$a'=(n-b-1)-(b-1)=n-2b,\ b'=a-(n-a)=2a-n$

5° $n>2a>a+b$ なら $(n-a)-a=n-2a>0$ よって $n-b-1\geqq n-a>a>b-1,\ a'=(n-b-1)-$

$(b-1)=n-2b$, $b'=(n-a)-a=n-2a$

$a=b>0$ のとき $T(aa00)=(a)(a-1)(n-a-1)(n-a)$ ここで $a>a-1$, $n-a>n-a-1$

6° $2a>n$ なら $a-(n-a)=2a-n>0$ よって $a-(n-a)\geqq 1$ よって $(a-1)-(n-a)\geqq 0$, このとき $a>a-1\geqq n-a>n-a-1$, $a'=a-(n-a-1)=2a-n+1$, $b'=(a-1)-(n-a)=2a-n-1$

7° $2a=n$ なら $n-a=a$, $n-a-1=a-1$, 並べかえて $(a)(a)(a-1)(a-1)$ よって $a'=a-(a-1)=1$, $b'=a-(a-1)=1$

8° $2a=n-1$ なら $n-a-1=a$, $n-a=a+1$, 並べかえて $(a+1)(a)(a)(a-1)$ よって $a'=(a+1)-(a-1)=2$, $b'=a-a=0$

9° $2a<n-1$ なら $(n-a-1)-a=n-1-2a>0$ よって $n-a>n-a-1>a>a-1$ よって $a'=(n-a)-(a-1)=n-2a+1$, $b'=(n-a-1)-a=n-2a-1$

$a>b=0$ のとき $a000\rightarrow(a-1)(n-1)(n-1)(1)$

10° $2a>n$ なら $a-(n-a)=2a-n>0$ よって $a>n-a$ よって $a-1\geqq n-a$ よって $n-1=n-1>a-1\geqq n-a$ よって $a'=(n-1)-(n-a)=a-1$, $b'=(n-1)-(a-1)=n-a$

11° $2a\leqq n$ なら $(n-a)-a=n-2a\geqq 0$ よって $n-a\geqq a$ よって $n-a>a-1$ よって $n-1=n-1\geqq n-a>a-1$ よって $a'=(n-1)-(a-1)=n-a$, $b'=(n-1)-(n-a)=a-1$

（おわり）

[8] により $ab00(n>a\geqq b\geqq 0, a>0)$ から求めた $a'b'00$ は $n>a'\geqq b'\geqq 0$, $a'>0$ である。

今後，例えば $ab00$ から 2° により $a'b'00$ が得られたときは $ab00\overset{2}{\Rightarrow}a'b'00$ 等と記す。

3. 補定理３の証明

補定理３の証明は文献(1)にあるが，これを変換 V を用いていい直す。

$n=2$ のとき：

$1000\overset{11}{\Rightarrow}1000$, $T(1000)=0111$

$1100\overset{7}{\Rightarrow}1100$, $T(1100)=1001$

1000と1100の収束値が異なるなら，核は存在しない。

$n=3$ のとき：$2000\overset{10}{\Rightarrow}1100$, $1100\overset{8}{\Rightarrow}2000$ よって $2000\Rightarrow1100\Rightarrow2000\Rightarrow1100\cdots\cdots$ となるから，$T(2000)=1221$, $T(1100)=1021$ がループをなす。よって $n=3$ のときには核が存在しない。

$n=4$ のとき：$2000\overset{11}{\Rightarrow}2100$, $2100\overset{4}{\Rightarrow}2000$ よって $2000\Rightarrow2100\Rightarrow2000\Rightarrow2100\cdots\cdots$ となるから，$T(2000)=1332$, $T(2100)=2022$ がループをなす。よって $n=4$ のときには核が存在しない。　（おわり）

4. 補定理４の証明

補定理３により，今後 $n\geqq 5$ としてよい。

補定理４の証明は文献(1)にあるが，これを変換 V を用いていい直す。なお，“核が存在するならば”を [9] のように “収束値が存在するならば” といい直す。

[9] $n\geqq 5$ のとき，ある数 x の収束値が存在するためには $n=5r$ であり，収束値は

$$T((3r)(r)(0)(0))=(3r)(r-1)(4r-1)(2r)$$ のみである。

（証明） ある x の収束値が存在するためには，[7] により，ある a,b について $n>a\geqq b\geqq 0$, $V(ab00)=ab00$ でなければならない。すなわち [8] にて $a=a'$, $b=b'$ である。

1° $a=2a-n$, $b=2b-n$　　　2° $a=2a-n$, $b=n-2b$

いずれも $a=n$ となり $ab00$ が n 進法の数なので $a<n$ であることに反している。

3° $a=2a-n+1$, $b=2a-n-1$ これを解いて $a=n-1$, $b=n-3$。3° の条件 $a+b=n$ により $n=4$ となり $n\geqq 5$ に反している。

4° $a=n-2b$, $b=2a-n$ これを解いて $a=3b$, $n=5b$

5° $a=n-2b$, $b=2a-n$ これを解いて $a=b$ となり，[8] での条件 $a>b$ に反している。

6° $a=2a-n+1$, $b=2a-n-1$ これを解いて $n=a+1=a-1$ となり不合理

7° $a=b=1$, [8] での条件 $2a=n$ により $n=2$ となり $n\geqq 5$ に反している。

8° $a=2$, $b=0$, [8] での条件 $a=b$ に反している。

9° $a=n-2a+1$, $a=n-2a-1$ これより $n=3a-1=3a+1$ となり不合理

10° $a=a-1$, $0=n-a$ 両式とも不合理

11° $a=n-a$, $0=a-1$ これより $n=2$ となり $n\geqq 5$ に反している。

よって 4° のときのみ成立し，$b=r$ とおくと $n=5r$, $a=3r$, $b=r$. 収束値は $T((3r)(r)(0)(0))=(3r)(r-1)(4r-1)(2r)$ である。 (おわり)

5. 補定理７の証明

数 $ab00$, $a\geqq b$ に変換 Vを何回か作用させて $a'b'00(a'\geqq b')$ となるとき，$ab00$ を先行数，$a'b'00$ を後続数という。補定理７の条件 $n\neq 5\cdot 2^t(t=0,1,2,\cdots\cdots)$は $n\neq 5r$, $r=1,2,\cdots\cdots$, または奇数 $p\geqq 3$ について $n=5\cdot 2^t p(t=0,1,2,\cdots\cdots)$ である。$n\neq 5r$ のときは [9] により収束値となる数がないので，すべての x が収束値をもたず，n 進法には核がない。

[10] 奇数 $p\geqq 3$ について $n=5\cdot 2^t p(t=0,1,2,\cdots\cdots)$ ならば $(1)(0)(0)(0)$は収束値をもたない。すなわち核が存在しない。

(証明) $n=5\cdot 2^t p(t=0,1,2,\cdots\cdots)$ のときは，収束値は $T((3r)(r)(0)(0))$, $(r=2^t p)$ だけである。まず $(3r)(r)(0)(0)$ の直前の先行数を求めるため，[8] の $ab00\Rightarrow a'b'00$ にて $a'=3r$, $b'=r$ として a,b を求めよう。

1° のとき：$3r=2a-5r$, $r=2b-5r$ より $a=4r$, $b=3r$

2° のとき：$3r=2a-5r$, $r=5r-2b$ より $a=4r$, $b=2r$

4° のとき：$3r=5r-2b$, $r=2a-5r$ より $a=3r$, $b=r$

5° のとき：$3r=5r-2b$, $r=5r-2a$ より $a=2r$, $b=r$

3°, 6°, 9° のとき：[8] にて $a'-b'=2$ であるが，他方 $a'-b'=3r-r=2r$ よって $2r=2$ これは $r\geqq p\geqq 3$ に反している。

7°, 8° のときは：[8] にて $a'+b'=2$ であるが，他方 $a'+b'=3r+r=4r$ よって $4r=2$ これも $r\geqq 3$ に反している。

10°, 11° のときは：[8] にて $a'+b'=n-1=5r-1$ であり，他方 $a'+b'=3r+r=4r$ よって $5r-1=4r$ よって $r=1$ これも $r\geqq 3$ に反している。

よって $(3r)(r)(0)(0)$ の先行数は $(2r)(r)(0)(0)$, $(3r)(r)(0)(0)$, $(4r)(2r)(0)(0)$, $(4r)(3r)(0)(0)$ のみである。

$n=5p$ すなわち $n=5\cdot 2^t p$ にて $t=0$ のときは，収束値 $(3p)(p)(0)(0)$ の先行数は $(2p)(p)(0)(0)$, $(3p)(p)(0)(0)$, $(4p)(2p)(0)(0)$, $(4p)(3p)(0)(0)$ のみである。

$(2p)(p)(0)(0)$ の先行数を求めるため，[8] にて $a'=2p$, $b'=p$ とおいて a,b を求めよう。

1°, 2°, 4°, 5° のときは $2p=2a-5p$ または $2p=5p-2a$ となり，$2a=7p$ または $2a=3p$ となり，p が奇数なので a は存在しない。

3°, 6°, 9° のとき，7°, 8° のときおよび 10°, 11° のときは，上記の $a'=3r$, $b'=r$ のときと同様に，$p\geqq 3$ に反している。

よって $(2p)(p)(0)(0)$ の先行数はない。同様にして $(4p)(2p)(0)(0)$，$(4p)(3p)(0)(0)$ にも先行数がない。

以上により $n=5p$ のときには，$(3p)(p)(0)(0)$ の先行数は $(2p)(p)(0)(0)$，$(3p)(p)(0)(0)$，$(4p)(2p)(0)(0)$，$(4p)(3p)(0)(0)$ のみである。よって $U(x)$ がこの4数とならない x（例えば $(1)(0)(0)(0)$ には収束値がない。

つぎに $n=5r$，$r=2^t p$ $(t=1,2,\cdots\cdots$，p は奇数で $p\geqq 3)$ のときをしらべよう。

$(3r)(r)(0)(0)$ の4個の直前の先行数は，いずれも $a'b'00$ とおくと，$a',b'\neq 0$，$a'\neq b'$，$a'+b'\neq n$ であり，$a'=k'p$，$b'=\ell'p$ である。このような条件をもつ $a'b'00$ の直前の先行数 $ab00$ を [8] によってしらべよう。

$1°$，$2°$，$4°$，$5°$ のときは $a,b\neq 0$，$a\neq b$，$a+b\neq n$ である。$a'=|2a-n|$，$b'=|2b-n|$ または $a'=|2b-n|$，$b'=|2a-n|$ であるから，a,b が存在するためには a',b' ともに偶数すなわち k',ℓ' ともに偶数でなければならない。このとき $a=kp$，$b=\ell p$ の形である。このとき $a,b\neq 0, a\neq b, a+b\neq n$ である。k',ℓ' の少なくとも一方が奇数なら a,b は存在しない。

$3°$，$6°$，$9°$ のときは [8] では $a'-b'=2$ であるが，他方 $a'-b'=(k'-\ell')p$ であり $k'-\ell'>0$ なので $a'-b'\geqq p\geqq 3$ よって $3°$，$6°$，$9°$ の場合はない。

$7°$，$8°$ のときも [8] では $a'+b'=2$ であるが，他方 $a'+b'=(k'+\ell')p$ であり $k',\ell'>0$ なので $a'+b'>p\geqq 3$ よって $7°$，$8°$ の場合はない。

$10°$，$11°$ のときは [8] では $a'+b'=n-1$ であり，他方 $a'+b'=(k'+\ell')p$ なので $n-1=(k'+\ell')p$ よって $n-(k'+\ell')p=1$。$a'+b'\neq n$ なので $p(\geqq 3)$ が1の約数となって不合理である。よって $10°$，$11°$ の場合もありえない。

以上により $(3r)(r)(0)(0)$ の2つ前の先行数 $ab00$ は $a=kp, b=\ell p, a,b\neq 0, a\neq b, a+b\neq n$ である。同様のことをくり返えすことにより，$(3r)(r)(0)(0)$ の先行数 $ab00$ は $a=kp, b=\ell p$ の形であり，$a,b\neq 0, a\neq b, a+b\neq n$ である。k,ℓ の両方とも偶数ならその先行数があるが，k,ℓ の少なくとも一方が奇数なら先行数がない。$U(x)$ がこのような $ab00$ でない x（例えば1000，$p000$ 等）は $(3r)(r)(0)(0)$ の先行数でないから収束値をもたない。よってこの n 進法では変換 T の核が存在しない。　（おわり）

x が収束値をもたないときは，$T^m(x)(m=0,1,2,\cdots\cdots)$ は無限個あり，n 進法の $ab00$ の個数は有限個しかないので，数列 x，$T(x)$，$T^2(x)$，……はループに陥ちこむ。

6. 補定理８，定理９の証明の準備

$V(ab00)=V(a'b'00)$ のとき $ab00\sim a'b'00$ と記す。このとき $T^2(ab00)=T^2(a'b'00)$ となる。

記法 $ab00\Rightarrow a'b'00$ にて，$ab00\sim ba00$，$a'b'00\sim b'a'00$ なので，$a\geqq b$，$a'\geqq b'$ と限定せず，$a<b$ または $a'<b'$ のときもこの記法を用いることにする。

[11] $a,b>0$ のとき

$ab00\sim(n-a)(b)(0)(0)\sim(a)(n-b)(0)(0)\sim(n-a)(n-b)(0)(0)$

（証明）

まず $a\geqq b>0$ のとき $ab00\sim(n-a)(b)(0)(0)$ を示そう。

[8] の $3°$，$4°$，$5°$ と $7°$，$8°$，$9°$ のときは $a+b\leqq n$ なので $n-a\geqq b$ よって

$T(ab00)=(a)(b-1)(n-b-1)(n-a)$，$T((n-a)(b)(0)(0))=(n-a)(b-1)(n-b-1)(a)$ これより $UT(ab00)=UT((n-a)(b)(0)(0))$ よって $V(ab00)=V((n-a)(b)(0)(0))$

$1°$，$2°$，$6°$ のときは $a+b>n$ より $b>n-a$

$T((n-a)(b)(0)(0))=T((b)(n-a)(0)(0))=(b)(n-a-1)(a-1)(n-b)$

$1°$ のときは $a>b$，$2b\geqq n$ より $a-1\geqq b$，$b\geqq n-b>n-a>n-a-1$ により $a-1\geqq b\geqq n-b>n-a$

-1 よって $V((b)(n-a)(0)(0))=(2a-n)(2b-n)(0)(0)=V(ab00)$

2° のときは $a>b$, $n>2b$ より $a-1\geqq b$, $n-b>b$ また $a+b>n$ より $b>n-a$, $a>n-b$ よって $a-1\geqq n-b$ それで $a-1\geqq n-b>b>n-a-1$

$V((b)(n-a)(0)(0))=(2a-n)(n-2b)(0)(0)=V(ab00)$

6° のときは $a=b$, $2a>n$ より $a>n-a$ よって $a-1\geqq n-a$ それで $a>a-1\geqq n-a>n-a-1$ よって $V((a)(n-a)(0)(0))=(2a-n+1)(2a-n-1)(0)(0)=V(aa00)$

つぎに $a\geqq b>0$ のとき $ab00\sim(a)(n-b)(0)(0)$ を示そう。1°, 2°, 3° と 6°, 7° のときは $a+b\geqq n$ より $a\geqq n-b$ よって

$T(ab00)=(a)(b-1)(n-b-1)(n-a)$, $T((a)(n-b)(0)(0))=(a)(n-b-1)(b-1)(n-a)$

それで $UT(ab00)=UT((a)(n-b)(0)(0))$ よって $V(ab00)=V((a)(n-b)(0)(0))$

4°, 5° と 8°, 9° のときは $a+b<n$ よって $n-b>a$

$T((a)(n-b)(0)(0))=T((n-b)(a)(0)(0))=(n-b)(a-1)(n-a-1)(b)$

4° のときは $a+b<n$, $2a\geqq n$ より $n-b>a\geqq n-a$ よって $n-b>a-1\geqq n-a-1$ また $a+b<n$ より $n-a>b$ よって $n-a-1\geqq b$ それで $n-b>a-1\geqq n-a-1\geqq b$ よって $V((n-b)(a)(0)(0))=(n-2b)(2a-n)(0)(0)=V(ab00)$

5° のときは $a>b$, $2a<n$ より $n-b>n-a>a>b$ よって $n-b>n-a-1>a-1\geqq b$ それで $V((n-b)(a)(0)(0))=(n-2b)(n-2a)(0)(0)=V(ab00)$

8°, 9° のときは $a=b$, $2a<n$ より $n-a>a$ よって $n-a-1\geqq a$ それで $n-a>n-a-1\geqq a>a-1$ よって $V((n-a)(a)(0)(0))=(n-2a+1)(n-2a-1)(0)(0)=V(aa00)$

以上により $a\geqq b$ のときは $ab00\sim(n-a)(b)(0)(0)\sim(a)(n-b)(0)(0)$ よって $a<b$ のときは $ba00\sim(n-b)(a)(0)(0)\sim(b)(n-a)(0)(0)$ それで $a\geqq b$ でも $a<b$ でも $ab00\sim(n-a)(b)(0)(0)\sim(a)(n-b)(0)(0)$。$b$ のかわりに $n-b$ を代入して $(a)(n-b)(0)(0)\sim(n-a)(n-b)(0)(0)$ よって $ab00\sim(n-a)(b)(0)(0)\sim(a)(n-b)(0)(0)\sim(n-a)(n-b)(0)(0)$ （おわり）

[12] $a>1$ のとき $a000\sim(n+1-a)(0)(0)(0)$

（証明） $T(a000)=(a-1)(n-1)(n-1)(n-a)$

$T((n+1-a)(0)(0)(0))=(n-a)(n-1)(n-1)(a-1)$ より明らか （おわり）

[13] $a\neq b$, a, $b>0$ のとき

12° $a+b\neq n$ なら $ab00\Rightarrow|2a-n|\,|2b-n|(0)(0)$

13° $a+b=n$ なら $ab00\Rightarrow(|a-b|+1)(|a-b|-1)(0)(0)$

$a=b>0$ のとき

14° $2a\neq n$, $n-1$ なら $aa00\Rightarrow(|2a-n|+1)(|2a-n|-1)(0)(0)$

15° $2a=n-1$ なら $aa00\Rightarrow2000$

16° $2a=n$ なら $aa00\Rightarrow1100$

$a>0$, $b=0$ のとき

17° $a\neq1$ なら $a000\Rightarrow(a-1)(n-a)(0)(0)$

18° $a=1$ なら $1000\Rightarrow(n-1)(0)(0)(0)$

（証明） [8] の 1°, 2°, 4°, 5° をまとめて 12° に，3° を 13° に，6°, 9° をまとめて 14° に，8° を 15° に，7° を 16° に，10°, 11° をまとめて 17° に言い直しただけである。 （おわり）

[8], [13] で計算する限りは，$0\leqq a, b<n$ のとき $0\leqq a', b'<n$ である。

[14] $a\neq b$, $0<a$, $b<\dfrac{n}{2}$ ならば

19° $(n-a)(n-b)(0)(0)\Rightarrow(n-2a)(n-2b)(0)(0)$

（証明） $a\neq b$ より $n-a\neq n-b$, また $0<a+b<n$ より $(n-a)+(n-b)=2n-(a+b)>n$ なの

で $(n-a)(n-b)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}|2(n-a)-n|\ |2(n-b)-n|(0)(0)=(n-2a)(n-2b)(0)(0)$　　（おわり）

［15］ $n=5r$, $r=2^t(t\geqq 1)$ のとき 1000, 1100, 2000 に後続して $(kr)(\ell r)(0)(0)$ がある。

（証明）

$1000\overset{18}{\Rightarrow}(0)(n-1)(0)(0)\sim(n-1)(0)(0)(0)\overset{17}{\Rightarrow}(n-2)(1)(0)(0)\sim(n-2)(n-1)(0)(0)$

$\overset{19}{\Rightarrow}(n-2^2)(n-2)(0)(0)\overset{19}{\Rightarrow}\cdots\overset{19}{\Rightarrow}(n-2^{s+1})(n-2^s)(0)(0)(1\leqq s\leqq t)$

$\overset{19}{\Rightarrow}\cdots\overset{19}{\Rightarrow}(n-2\cdot 2^t)(n-2^t)(0)(0)=(n-2r)(n-r)(0)(0)=(3r)(4r)(0)(0)\sim(4r)(3r)(0)(0)$

$1100\overset{14}{\Rightarrow}(n-2+1)(n-2-1)(0)(0)=(n-1)(n-3)(0)(0)\overset{19}{\Rightarrow}(n-2)(n-3\cdot 2)(0)(0)$

$\overset{19}{\Rightarrow}\cdots\overset{19}{\Rightarrow}(n-2^s)(n-3\cdot 2^s)(0)(0)(1\leqq s\leqq t)$

$\overset{19}{\Rightarrow}\cdots\overset{19}{\Rightarrow}(n-2^s)(n-3\cdot 2^s)(0)(0)=(n-r)(n-3r)(0)(0)=(4r)(2r)(0)(0)$

$2000\overset{17}{\Rightarrow}(1)(n-2)(0)(0)\sim(n-1)(n-2)(0)(0)$。以下 1000 と同じ過程をたどって $(4r)(3r)(0)(0)$ に至る。　　（おわり）

$2^p(0\leqq p\leqq t)$ の倍数の集合を $M(2^p)$ と記す。$\alpha\epsilon M(2^p)$ ならば

$\alpha=kr+\lambda_{t-1}2^{t-1}+\lambda_{t-2}2^{t-2}+\cdots+\lambda_p 2^p$ $(0\leqq k<5,\ \lambda_{t-1},\lambda_{t-2}\cdots,\lambda_p=0$ または $1)$

とくに，$\lambda_p=1$ である α の集合を $N(2^p)$ と記す。

$\alpha\epsilon N(2^p)$ $(0\leqq p\leqq t-1)$ のときは

(1) $\alpha\neq 0$　(2) $\alpha\neq n$　(3) $n-\alpha\epsilon N(2^p)$ である。

［16］ (1) $n=5r$, $r=2^t(t\geqq 1)$ とする。$0\leqq q\leqq t-2$ のとき

(A) $\alpha\epsilon N(2^p)(q<p\leqq t-2)$ または (B) $\alpha=kr$ $(0<k<5)$ ならば，

$a=\alpha+2^q$, $b=\alpha-2^q$ に対して $a'=\alpha'+2^{q+1}$, $b'=\alpha'-2^{q+1}$ が定まり，$ab00\Rightarrow a'b'00$ となる。ここに (A) $\alpha'\epsilon N(2^{p+1})$　(B) $a'=k'r$, k' は k で定まり $0<k'<5$

(2) $\alpha\epsilon N(2^p)(1\leqq p\leqq t-1)$，$a=\alpha+1$, $b=\alpha-1$ のとき，$ab00$ に対して $(2^{t-p}+1)(2^{t-p}-1)(0)(0)$ または $a''b''00$ が後続する。ここに $a''=k''r+2^{t-p}$, $b''=k''r-2^{t-p}$, k'' は a,b で定まり，$0<k''<5$ である。

(3) $(2^p+1)(2^p-1)(0)(0)$ $(1\leqq p\leqq t-1)$ には $(4r+2^{t-p})(4r-2^{t-p})(0)(0)$ が後続する。

(4) $(kr+2^p)(kr-2^p)(0)(0)$ $(0<k<5,\ 0\leqq p\leqq t-1)$ に $(k''r)(\ell''r)(0)(0)$ が後続する。

(5) $a>0$ のとき $aa00$ に $(k'r)(\ell'r)(0)(0)$ が後続する。

（証明）　(1) a, $b\epsilon N(2^q)$ なので a, $b\neq 0$，また $a\neq b$

(A)のときは，$a+b=2\alpha\epsilon N(2^{p+1})$，$p+1\leqq t-1$ なので $a+b\neq n$

(B)のときは，$k\neq 0$ なので $a+b=2kr\neq 5r=n$

いずれも $a+b\neq n$ なので $a'=|2\alpha+2^{q+1}-n|$, $b'=|2\alpha-2^{q+1}-n|$ として $ab00\overset{12}{\Rightarrow}a'b'00$ となる。

(A)のときは，$2\alpha\epsilon N(2^{p+1})$，$p+1\leqq t-1$ なので $2\alpha-n\neq 0$。$2\alpha-n$ の符号を ρ, $|2\alpha-n|=\alpha'$ とすると $\alpha'\epsilon N(2^{p+1})$，$p+1>q+1$ なので，$2\alpha\pm 2^{q+1}-n$ の符号は ρ であり，$a'=\alpha'+\rho\cdot 2^{q+1}$, $b'=\alpha'-\rho\cdot 2^{q+1}$ となる。

(B)のときは $0<k<5$ なので，$2\alpha-n=2kr-5r\neq 0$。$2\alpha-n$ の符号を ρ, $|2\alpha-n|=\alpha'=k'r$ とすると $0<k'<5$ である。$\alpha'=k'r>2^{q+1}$ なので $2\alpha\pm 2^{q+1}-n$ の符号は ρ である。よって

$a'=\alpha'+\rho 2^{q+1}$, $b'=\alpha'-\rho 2^{q+1}$

(A), (B)いずれも，$\rho=+1$ のときはそのままとし，$\rho=-1$ のときは a', b' をとりかえると

$a'=\alpha'+2^{q+1}$, $b'=\alpha'-2^{q+1}$ となる。

(2) $\alpha\epsilon N(2^p)$，$1\leqq p\leqq t-2$ のとき，$a=\alpha+1$, $b=\alpha-1$ に対する(1)(A)の α',a',b' を α_1,a_1,b_1 とする。α_1,a_1,b_1 に対する α',a',b' を α_2,a_2,b_2 とする。以下同様に α_s,a_s,b_s $(1\leqq s\leqq t-p-1)$ を

定義すると $\alpha_s \in N(2^{p+s})$, $a_s=\alpha_s+2^s$, $b_s=\alpha_s-2^s$ となり

$ab00 \Rightarrow a_1b_100 \Rightarrow a_2b_200 \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow a_sb_s00$ となる。$s=t-p-1$ のとき α_{t-p-1} を α', $a_{t-p-1}=\alpha'+2^{t-p-1}$ を a', $b_{t-p-1}=\alpha'-2^{t-p-1}$ を b' とおくと, $p+(t-p-1)=t-1$ なので

$\alpha' \in N(2^{t-1})$, $a'=\alpha'+2^{t-p-1}$, $b'=\alpha'-2^{t-p-1}$

となる。はじめの $a=\alpha+1$, $b=\alpha-1$, $\alpha \in N(2^p)$ で $p=t-1$ のときはこの形に含まれる。

$\alpha' \in N(2^{t-1})$ より $\alpha' \neq 0$, $t-p-1<t-1$ なので $a', b' \in N(2^{t-p-1})$, よって $a', b' \neq 0$, $a' \neq b'$ である。$a'+b'=2\alpha \in N(2^t)$ なので $a'+b'=n$ のときと $a'+b' \neq n$ のときに分かれる。

$a'+b'=n$ のときは $ab00 \overset{13}{\Rightarrow} (|a-b|+1)(|a-b|-1)(0)(0)$, $|a-b|=2\cdot 2^{t-p-1}=2^{t-p}$ $(1\leqq p\leqq t-1)$ なので $ab00$ に対して $(2^{t-p}+1)(2^{t-p}-1)(0)(0)$ が後続する。

$a'+b' \neq n$ のときは $ab00 \overset{12}{\Rightarrow} a''b''00$ とすると $a''=|2a'-n|$, $b''=|2b'-n|$ である。

$2a'-n=2\alpha'+2^{t-p}-n=(2\alpha'-n)+2^{t-p}$ にて $2\alpha'-n \neq 0$ であり, $2\alpha'-n \in M(2^t)$, $2^{t-p}<2^t$ なので, $2a'-n$ の符号は $2\alpha'-n$ の符号に従がう。その符号を ρ とし, $|2\alpha'-n|=k''r$ とおくと, $0<k''<5$ であって $a''=|2a'-n|=k''r+\rho\cdot 2^{t-p}$ となる。このとき $b''=|2b'-n|=k''r-\rho\cdot 2^{t-p}$ となるが, $\rho=+1$ のときはそのままにし, $\rho=-1$ のときは a'' と b'' をとりかえると, いずれも $a''=k''r+2^{t-p}$, $b''=k''r-2^{t-p}$, $0<k''<5$ となる。

(3) $1\leqq p\leqq t-1$ なので, $0<2^{p+1}-2<2^{p+1}+2\leqq 2^t+2<2r<\frac{n}{2}$

よって $(2^p+1)(2^p-1)(0)(0) \overset{12}{\Rightarrow} (n-2^{p+1}-2)(n-2^{p+1}+2)(0)(0)$

$\overset{19}{\Rightarrow} (n-2^{p+2}-2^2)(n-2^{p+2}+2^2)(0)(0) \overset{19}{\Rightarrow} \cdots$

$\overset{19}{\Rightarrow} (n-2^{p+s}-2^s)(n-2^{p+s}+2^s)(0)(0)(1\leqq s\leqq t-p)$

$s=t-p$ のとき $(n-2^t-2^{t-p})(n-2^t+2^{t-p})(0)(0)=(4r-2^{t-p})(4r+2^{t-p})(0)(0)$ である。

(4) $0<k<5$, $0\leqq p\leqq t-2$ のとき $a=kr+2^p$, $b=kr-2^p$ に対する(1)(B)の k', a', b' を k_1, a_1, b_1 とする。a_1, b_1 に対する k', a', b' を k_2, a_2, b_2 とする。以下同様に $k_s, a_s, b_s (1\leqq s\leqq t-p-1)$ を定義すると, $0<k_s<5$, $a_s=k_sr+2^{p+s}$, $b_s=k_sr-2^{p+s}$ となり, $ab00 \Rightarrow a_1b_100 \Rightarrow a_2b_200 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_sb_s00$ となる。$s=t-p-1$ のとき k_s, a_s, b_s を k', a', b' とおくと

$0<k'<5$, $a'=k'r+2^{t-1}$, $b'=k'r-2^{t-1}$

$a', b' \neq 0$, $a' \neq b'$ であり, $a'=2k'r \neq 5r=n$ なので

$a'b'00 \overset{12}{\Rightarrow} a''b''00$ とすると $a''=|2k'r+2^t-n|$, $b''=|2k'r-2^t-n|$ となる。$|2k'+1-5|=k''$, $|2k'-1-5|=\ell''$ とおくと, $k'' \neq \ell''$, $0\leqq k''$, $\ell''<5$ で, k'', ℓ'' の少なくとも一方は 0 でない。

(5) $a>0$ で, $2a=n$ なら $aa00 \overset{16}{\Rightarrow} 1100$ よって [15] により $aa00$ に $(k'r)(\ell'r)(0)(0)$ が後続する。

$2a \neq n$ なら, $n-1$ が奇数なので $2a \neq n-1$, よって $aa00 \overset{14}{\Rightarrow} (|2a-n|+1)(|2a-n|-1)(0)(0)$

(2), (3), (4)によって $aa00$ には $(k''r)(\ell''r)(0)(0)$ が後続する。 (おわり)

[17] (1) $n=5r$, $r=2^t(t\geqq 1)$ とし, $\sigma=+1$ または -1 とする。$0\leqq q\leqq t-2$ のとき

(A) $\alpha \in N(2^p)$ $(q<p\leqq t-2)$ または (B) $\alpha=kr(0<k<5)$

ならば $a=\alpha+\sigma\cdot 2^q$, $b=\alpha$ に対して

$a'=\alpha'+\sigma' 2^{q+1}$, $b'=\alpha'$ が定まり $ab00 \Rightarrow a'b'00$ となる。ここに σ' は $+1$ または -1 で, α と σ により定まる。また

(A) $\alpha' \in N(2^{p+1})$ (B) $\alpha'=k'r$, k' は k で定まり $0<k'<5$

(2) $\alpha \in N(2^p)(1\leqq p\leqq t-1)$, $a=\alpha+1$, $b=\alpha$ のとき $ab00$ に対して $2^{t-p}000$ または $(k''r+\sigma''\cdot 2^{t-p})(k''r)(0)(0)$ が後続する。ここに σ'', k'' は α で定まり, $\sigma''=+1$ または -1, $0<k''<5$ である。

(3) $2^{t-p}000$ $(1\leqq p\leqq t-1)$ には $(4r+2^{t-p})(4r)(0)(0)$ が後続する。

(4) $(kr+\sigma\cdot 2^p)(kr)(0)(0)$ $(0<k<5,\ 0\leqq p\leqq t-1,\ \sigma=+1$ または $-1)$ には $(k''r)(\ell''r)(0)(0)$が後続する。ここに $0<k''<5,\ 0\leqq \ell''<5$ である。

(5) $a>0$ のとき $a000$ には $(k'r)(\ell'r)(0)(0)$ が後続する。

（証明） (1)$a, b\neq 0,\ a\neq b$ は明らか。$a+b=2\alpha+\sigma\cdot 2^q \epsilon N(2^q)$，$0\leqq q<t-1$ なので $a+b\neq 5r=n$ である。よって $ab00\overset{12}{\Rightarrow}a'b'00$ とすると，$a'=|2a-n|$，$b'=|2b-n|$ である。

(A)のときは，$a'=|2\alpha+\sigma\cdot 2^{q+1}-5r|=|(2\alpha-5r)+\sigma\cdot 2^{q+1}|$。$\alpha'=|2\alpha-5r|$ とすると $\alpha'\epsilon N(2^{p+1})$，$p+1\leqq t-1$ なので $0<\alpha'<n$。$2\alpha-5r$ の符号を ρ とすると，$2^{q+1}<2^{p+1}$ なので $2a-n$ の符号は ρ である。$a'=\alpha'+\rho\cdot\sigma 2^{q+1}$，このとき $b'=\alpha'$ である。

(B)のときは，$a'=|2kr+\sigma\cdot 2^{q+1}-5r|=|(2k-5)r+\sigma\cdot 2^{q+1}|$。$k'=|2k-5|$ とおくと，$0<k<5$ により $0<k'<5$。$\alpha'=k'r$ とおく。$2k-5$ の符号を ρ とすると，$r>2^{q+1}$ なので $2a-n$ の符号も ρ となり $a'=\alpha'+\rho\cdot\sigma\cdot 2^{q+1}$，このとき $b'=\alpha'$ である。

(A)(B)いずれも $\rho\cdot\sigma=\sigma'$ とすると $a'=\alpha'+\sigma'\cdot 2^{q+1}$，$b'=\alpha'$

(2) $\alpha\epsilon N(2^p)(1\leqq p\leqq t-2)$ のとき $a=\alpha+1$，$b=\alpha$ に対する(1)(A)の α', σ', a', b' を $\alpha_1, \sigma_1, a_1, b_1$ とする。a_1, b_1 に対する α', σ', a', b' を $\alpha_2, \sigma_2, a_2, b_2$ とする。以下同様に $\alpha_s, \sigma_s, a_s, b_s$ $(1\leqq s\leqq t-p-1)$ を定義すると

$\alpha_s\epsilon N(2^{p+s})$，$a_s=\alpha_s+\sigma_s\cdot 2^s$，$b_s=\alpha_s$

$s=t-p-1$ のとき，α_{t-p-1}，σ_{t-p-1}，a_{t-p-1}，b_{t-p-1} を α', σ', a', b' とおくと，$p+(t-p-1)=t-1$ なので

$\alpha'\epsilon N(2^{t-1})$，$a'=\alpha'+\sigma'\cdot 2^{t-p-1}$，$b'=\alpha'$

$\alpha'\epsilon N(2^{t-1})$ により $0<\alpha'<n$ である。$a', b'>0$，$a'\neq b'$，$a'+b'=2\alpha'+\sigma'\cdot 2^{t-p-1}\epsilon N(2^{t-p-1})$，$2^{t-p-1}<2^{t-1}$ により $a'+b'\neq n$。よって $a'b'00\overset{12}{\Rightarrow}a''b''00$ とおくと，$a''=|2a'-n|$，$b''=|2b'-n|$ となる。ここで $2\alpha'\epsilon N(2^t)$ なので $b''=|2\alpha'-n|=0$ と $b''\neq 0$ のときがある。

$b''=0$ すなわち $2\alpha'-n=0$ のときは

$$a''=|2\alpha'+\sigma'\cdot 2^{t-p}-n|=|\sigma'\cdot 2^{t-p}|=2^{t-p}$$

なので $ab00$ に $2^{t-p}000$ が後続することになる。

$b''\neq 0$ すなわち $2\alpha'-n\neq 0$ のときは $2\alpha'-n\epsilon M(2^t)$ なので $|2\alpha'-n|=k''r$，$0<k''<r$ となる。よって $b''=k''r$。

$2a'-n=(2\alpha'-n)+\sigma'\cdot 2^{t-p}$，$2^{t-p}<2^t$ なので，$2\alpha'-n$ の符号を ρ とすると，$2a'-n$ の符号も ρ となる。よって

$a''=|2a'-n|=k''r+\rho\sigma'\cdot 2^{t-p}$

$\rho\sigma'=\sigma''$ とおくと $a''=k''r+\sigma''2^{t-p}$，$\sigma''=+1$ または -1 となる。よって $ab00$ に $(k''r+\sigma''\cdot 2^{t-p})(k''r)(0)(0)$，$0<k''<5$ が後続することになる。

(3) $1\leqq p\leqq t-1$ なので $0<2^p<r<\dfrac{n}{2}$よって

$$2^p000\overset{17}{\Rightarrow}(2^p-1)(n-2^p)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(n-2^{p+1}+2)(n-2^{p+1})(0)(0)$$
$$\overset{19}{\Rightarrow}(n-2^{p+2}+2^2)(n-2^{p+2})(0)(0)\overset{19}{\Rightarrow}\cdots$$
$$\overset{19}{\Rightarrow}(n-2^{p+s}+2^s)(n-2^{p+s})(0)(0)\quad(1\leqq s\leqq t-p-1)$$

$s=t-p-1$ のとき，$p+s=p+(t-p-1)=t-1$ により

$$(n-2^{p+s}+2^s)(n-2^{p+s})(0)(0)=(n-2^{t-1}+2^{t-p-1})(n-2^{t-1})(0)(0)$$
$$\overset{19}{\Rightarrow}(n-2^t+2^{t-p})(n-2^t)(0)(0)=(4r+2^{t-p})(4r)(0)(0)$$

(4) $a=kr+\sigma\cdot 2^p$，$b=kr$ $(0<k<5,\ 0\leqq p\leqq t-2,\ \sigma=+1$ または $-1)$ に対する(1)(B)のk', σ', a', b' を k_1, σ_1, a_1, b_1 とする。a_1, b_1 に対する k', σ', a', b' を k_2, σ_2, a_2, b_2 とする。以下同様に

k_s, σ_s, a_s, b_s ($1 \leqq s \leqq t-p-1$) を定義すれば

$ab00 \Rightarrow a_1b_100 \Rightarrow a_2b_200 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_sb_s00$

ここに $a_s = k_sr + \sigma_s \cdot 2^{p+s}$, $b_s = k_sr$, $0 < k_s < 5$。

とくに $s = t-p-1$ とすると，

$p+s = p+(t-p-1) = t-1$ なので $k_{t-p-1} = k'$, $\sigma_{t-p-1} = \sigma'$, $a_{t-p-1} = a'$, $b_{t-p-1} = b'$ とおいて

$a'b'00 = (k'r + \sigma' 2^{t-1})(k'r)(0)(0)$ $(0 < k' < 5)$

この式は $p = t-1$ のときの $ab00$ をも含んでいる。

$a', b' \neq 0$, $a' \neq b'$ である。$a'+b' = 2k'r + \sigma' 2^{t-1} \epsilon N(2^{t-p})$ なので $a'+b' \neq n$ よって $a'b'00 \overset{12}{\Rightarrow} a''b''00$ とすると $a'' = |2a'-n|$, $b'' = |2b'-n|$ である。

$2b'-n = 2k'r - n = (2k'-5)r$, $2k' \neq 5$ よって $|2k'-5| = k''$ とおくと $b'' = k''r$, $0 < k'' < 5$ である。

$2a'-n = 2k'r + \sigma' 2^t - n = (2k' + \sigma' - n)r$ なので $|2k' + \sigma' - n| = \ell''$ とおくと，$a'' = |2a'-n| = \ell''r$ となる。ここに$0 \leqq \ell'' < 5$ であり，$ab00$ に $(k''r)(\ell''r)(0)(0)$ が後続することになる。

(5) $a=1$ のときは［15］により 1000 に $(k'r)(\ell'r)(0)(0)$ が後続する。$a \geqq 2$のときは

$a000 \overset{17}{\Rightarrow} (a-1)(n-a)(0)(0) \sim (a-1)(a)(0)(0) \sim (n-a+1)(n-a)(0)(0)$

なので，a が奇数なら $a-1 = \alpha$, $a = \alpha+1$

a が偶数なら $n-a = \alpha$, $n-a+1 = \alpha+1$

とおくと $\alpha \epsilon N(2^p)$, $p \geqq 1$ となるから(2)(3)(4)により，$a000$ の後に $(k''r)(\ell''r)(0)(0)$ が続くことになる。 （おわり）

［18］ $ab00$ に $(k'r)(\ell'r)(0)(0)$ が後続する。$(0 < k < 5,\ 0 \leqq \ell < 5)$

（証明）

$a, b \epsilon M(2^s)$ $(0 \leqq s \leqq t-1)$ とする。

$a, b > 0$, $a \neq b$, $a+b \neq n$ のときは $ab00 \overset{12}{\Rightarrow} a'b'00$ となり，$a' = |2a-n|$, $b' = |2b-n|$ なので $a', b' \epsilon M(2^{s+1})$

$a, b > 0$, $a \neq b$, $a+b = n$ のときは $b = n-a$ なので

$ab00 = (a)(n-a)(0)(0) \sim aa00$ よって［16］(5)により $(k'r)(\ell'r)(0)(0)$ が後続する。

$a = b > 0$ のときは［16］(5)により，$a > 0$, $b = 0$ のときは［17］(5)により $(k'r)(\ell'r)(0)(0)$ が後続する。

$k'r, \ell'r \epsilon M(2^{s+1})$ なので，$ab00$ に対して $a'b'00$ $(a', b' \epsilon M(2^{s+1}))$ が後続する。よって s に関する帰納法により $ab00$ に対して $a''b''00(a'', b'' \epsilon M(2^t))$，すなわち $(k''r)(\ell''r)(0)(0)$ が後続することになる。 （おわり）

7. 補定理８，定理９の証明

$n = 5r$, $r = 2^t$ $(t = 0, 1, 2 \cdots)$ のとき，核をもつかどうかをしらべるには［18］により $(kr)(\ell r)(0)(0)$ の収束性をしらべれば十分である。

［19］ $n = 5r$, $r = 2^t$ $(t = 0, 1, 2, \cdots)$ のとき核をもつかどうかしらべるには，$n = 5$ のときは

1000，2000，3000，1100，3300

$n = 5r$, $r = 2^t$ $(t = 1, 2, \cdots)$ のときは

$(r)(0)(0)(0)$, $(2r)(0)(0)(0)$, $(3r)(0)(0)(0)$, $(4r)(0)(0)(0)$, $(r)(r)(0)(0)$, $(3r)(3r)(0)(0)$ のみの収束性をしらべれば十分である。

（証明）

$n = 5$ のときは［12］により 2000～4000 なので 2000 をしらべたら，4000 の方はしらべなくてもよ

い。

$n=5r$, $r=2^t$, $t=0,1,2,\cdots$($n=5$ を含む) のとき $ab00$ ($a,b>0$) については[18]により $a=kr$, $b=\ell r(0<k<5,0<\ell<5)$ のときのみ調べればよい。[11] により $(kr)(\ell r)(0)(0)\sim((5-k)r)(\ell r)(0)(0)\sim(kr)((5-\ell)r)(0)(0)\sim((5-k)r)((5-\ell)r)(0)(0)$ なので k と $5-k$ のうち，ℓ と $5-\ell$ のうち，奇数すなわち1または3とになるもののみをとればよい。また $ab00\sim ba00$ なので $ab00$ ($a\geqq b$) のみをしらべればよい。このうち $k=3$, $\ell=1$ は収束することが判っている。 （おわり）

$ab00\Rightarrow a'b'00$ または $ab00\Rightarrow a''b''00\sim a'b'00$ のときは $ab00\rightarrow a'b'00$ と略記する。このとき $ab00$ と $a'b'00$ には後続数で共通のものがある。

[20] $n=5$ のときは核がある。

（証明）

$1000\overset{18}{\Rightarrow}4000\sim2000$, $2000\overset{17}{\Rightarrow}1300\sim3100$

$3000\overset{17}{\Rightarrow}2200\sim3300$, $1100\overset{14}{\Rightarrow}4200\sim3100$

$3300\overset{14}{\Rightarrow}2000$

すなわち

$3000\rightarrow3300\rightarrow2000\rightarrow3100$

$1000\rightarrow2000\rightarrow3100$

$1100\rightarrow3100$

よって $n=5$ のときは核がある。 （おわり）

[21] $n=5r$, $r=2\cdot4^t$ ($t=0,1,2,\cdots$) のときは核がある。

$r=4^t(t=1,2,\cdots)$ のときは，n 進法の数には収束値のあるものとループに陥ちこむものとに分れる。ループはただ一つしかない。

（証明）

$n=5r$, $r=2^{4t+i}$, $t=0,1,2,\cdots$, $i=0,1,2,3$, ただし $t=i=0$ は除外する。

$$(r)(0)(0)(0)\overset{17}{\Rightarrow}(r-1)(4r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^2)(r)(0)(0)$$
$$\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^3)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^4)(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^5)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$$
$$\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4s})(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4s+1})(3r)(0)(0)$$
$$\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4s+2})(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4s+3})(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$$

$r=2^{4t}$ ならば$\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4t})(r)(0)(0)\sim(r)(0)(0)(0)$ （ループ）

$r=2^{4t+1}$ $\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4t+1})(3r)(0)(0)=(4r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+2}$ $\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4t+2})(r)(0)(0)=(2r)(r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+3}$ $\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4t+3})(3r)(0)(0)=(2r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(3r)(0)(0)$

$$(2r)(0)(0)(0)\overset{17}{\Rightarrow}(2r-1)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r+2)(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^2)(3r)(0)(0)$$
$$\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^3)(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^4)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$$
$$\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4s})(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4s+1})(r)(0)(0)$$
$$\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4s+2})(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4s+3})(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$$

$r=2^{4t}$ ならば$\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4t})(3r)(0)(0)=(4r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+1}$ $\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4t+1})(r)(0)(0)=(2r)(r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+2}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4t+2})(3r)(0)(0)=(2r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(3r)(0)(0)$

$r=2^{4t+3}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4t+3})(r)(0)(0)\sim(r)(0)(0)(0)$

$(3r)(0)(0)(0)\overset{17}{\Rightarrow}(3r-1)(2r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r-2)(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^2)(3r)(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^3)(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^4)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4s})(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4s+1})(r)(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4s+2})(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4s+3})(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$r=2^{4t}$ ならば$\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4t})(3r)(0)(0)=(2r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(3r)(0)(0)$

$r=2^{4t+1}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4t+1})(r)(0)(0)\sim(r)(0)(0)(0)$

$r=2^{4t+2}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4t+2})(3r)(0)(0)=(4r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+3}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4t+3})(r)(0)(0)=(2r)(r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$(4r)(0)(0)(0)\overset{17}{\Rightarrow}(4r-1)(r)(0)(0)\sim(r+1)(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^2)(r)(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^3)(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^4)(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4s})(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4s+1})(3r)(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4s+2})(r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4s+3})(3r)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$r=2^{4t}$ ならば$\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4t})(r)(0)(0)=(2r)(r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+1}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4t+1})(3r)(0)(0)=(2r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(3r)(0)(0)$

$r=2^{4t+2}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4t+2})(r)(0)(0)=(2r)(r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+3}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4t+3})(3r)(0)(0)=(4r)(3r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$(r)(r)(0)(0)\overset{14}{\Rightarrow}(3r+1)(3r-1)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r+2)(r-2)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^2)(3r+2^2)(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^3)(r+2^3)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^4)(3r-2^4)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4s})(3r-2^{4s})(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4s+1})(r-2^{4s+1})(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4s+2})(3r+2^{4s+2})(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4s+3})(r+2^{4s+3})(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$r=2^{4t}$ ならば$\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4t})(3r-2^{4t})(0)(0)=(4r)(2r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+1}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4t+1})(r-2^{4t+1})(0)(0)=(2r)(0)(0)(0)$

$r=2^{4t+2}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4t+2})(3r+2^{4t+2})(0)(0)=(4r)(2r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+3}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4t+3})(r+2^{4t+3})(0)(0)\sim(2r)(0)(0)(0)$

$(3r)(3r)(0)(0)\overset{14}{\Rightarrow}(r+1)(r-1)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2)(3r+2)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^2)(r+2^2)(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^3)(3r-2^3)(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$\overset{12}{\Rightarrow}(2r+2^{4s})(r-2^{4s})(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4s+1})(3r+2^{4s+1})(0)(0)$

$\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4s+2})(r+2^{4s+2})(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4s+3})(3r-2^{4s+3})(0)(0)\overset{12}{\Rightarrow}\cdots$

$r=2^{4t}$ ならば$\overset{12}{\Rightarrow}(r+2^{4t})(r-2^{4t})(0)(0)\sim(2r)(0)(0)(0)$

$r=2^{4t+1}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(3r-2^{4t+1})(3r+2^{4t+1})(0)(0)=(2r)(4r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+2}$ $\quad\overset{12}{\Rightarrow}(r-2^{4t+2})(r+2^{4t+2})(0)(0)\sim(2r)(0)(0)(0)$

$r=2^{4t+3}$ $\overset{12}{\Rightarrow}(3r+2^{4t+3})(3r-2^{4t+3})(0)(0)=(4r)(2r)(0)(0)\sim(3r)(r)(0)(0)$

以上により

$r=2^{4t}$ ならば（$t=0$ を除く）

$(r)(0)(0)(0)\rightarrow(r)(0)(0)(0)$（ループ）

$(3r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(3r)(0)(0)\rightarrow(2r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(r)(r)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(4r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+1}$ ならば

$(3r)(0)(0)(0)\rightarrow(r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(r)(r)(0)(0)\rightarrow(2r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(4r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(3r)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+2}$ ならば

$(3r)(3r)(0)(0)\rightarrow(2r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(2r)(0)(0)\rightarrow(2r)(0)(0)(0)$（ループ）

$(r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(r)(r)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(3r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(4r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$r=2^{4t+3}$ ならば

$(r)(r)(0)(0)\rightarrow(2r)(0)(0)(0)\rightarrow(r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(3r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(3r)(3r)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$(4r)(0)(0)(0)\rightarrow(3r)(r)(0)(0)$

$n=5r$，$r=1$ または $r=2\cdot4^t$（$t=0,1,2,\cdots$）のときは核 $T((3r)(r)(0)(0))=(3r)(r-1)(4r-1)(2r)$ をもつ

$n=5r$，$r=4^{2t+1}$（$t=0,1,2,\cdots$）のときは $(3r)(r-1)(4r-1)(2r)$ に収束するものと，$T((2r)(0)(0)(0))=(2r-1)(5r-1)(5r-1)(3r)$，$T((3r)(2r)(0)(0))=(3r)(2r-1)(3r-1)(2r)$ を含むループに陥ちこむものとに分れる。

$n=5r$，$r=4^{2t}$（$t=1,2,\cdots$）のときは，$(3r)(r-1)(4r-1)(2r)$ に収束するものと，$T(r000)=(r-1)(5r-1)(5r-1)(4r)$ を含むループに陥ちこむものとに分れる。（おわり）

追記：本稿校正中，文献［3］が発表されていることを教えてもらいました。本稿の方針は［3］のそれと全く同じではあるが，それでも，細かいところで差があると考えまして，このままで発表させていただきます。

参考文献

〔1〕加納幹雄　6174の不思議を追って　別冊数理科学，パズルV，1980,10.　p.p.111—117　サイエンス社

〔2〕淡中忠郎　6174の謎　高校への数学，1980,7.　p.p.42—45　東京出版

〔3〕H.Hasse and G.D.Pricbett, The determination of all four-digit Kaprekar constants, J.Reine u. Angew. Math. 299/300 (1978), p.p. 113—124