

# パソコンによる有限要素法解析の研究

## Study of Finite Element Method by Personal Computer

川島成平\*      小林正\*\*      杉本正勝\*\*\*  
Narihei Kawashima    Tadashi Kobayashi    Masakatsu Sugimoto

Finite element method is usually used to analyse the stress distributions in a solid by a main frame computer. Development of 16 bits personal computers enables us to analyse engineering problems by personal computers.

In this paper, finite element method is applied to analyse the behaviors of a cantilever beam with PC-9801 m2, by using FORTRAN compiler. The deflection lines of a cantilever beam in various mesh divisions are compared with one of the beam theory, and the effective mesh division is confirmed from the view point of accuracy. The effects of the analytical methods of simultaneous equations on the each execute time are obtained.

Two zooming analyses are applied to the some problem and the results are compared with ones of traditional finite element method divided a cantilever beam into fine elements. The deflections of the central section of a cantilever beam by the zooming analyses have a fairly good agreement with one by traditional finite element method.

It is clarified that a personal computer is available instead of a main frame computer in finite element method by using a zooming analysis.

### 1. 緒言

有限要素法<sup>1)</sup> (以下 FEM と略記) は強度設計における解析手法として定着した感がある。著者らの分野でも弾塑性プログラム<sup>2)</sup>が開発されているが、現在までの FEM プログラムは大型もしくは中型計算機で解析が行なわれることを前提として開発されて来た。電子計算機の発達は著しく、スーパーコンピュータの出現 (たとえば HITAC S-810) でさらに FEM を含む計算力学の進歩が見込まれるが、パーソナルコンピュータの発達も特筆すべきものがある。

パソコンによる FEM 解析に関する研究の報告は、今日まで主として 8 ビットパソコンで BASIC 言語を用いたものであり<sup>3)~5)</sup>、その記憶容量、演算速度から見て教育的色彩の濃い内容であった。16 ビットパソコンを用いて、FORTRAN 言語でプログラミングすることによって、実用的な FEM 解析プログラムの開発が可能となっているが、その報告<sup>6)</sup>は今だ少ない。

---

\*      短期大学部  
\*\*     京都府警本部科学捜査研究所  
\*\*\*    大阪府立大学工学部

パソコンによって実用的な FEM 解析を遂行することは教育的意義も少なくないが、産業界及び工業界においては、解析もしくはシミュレーション部分をワークステーションに組み込んだ CAD (Computer Aided Design) システム (現在のシステムはほとんどこの部分を大型計算機に頼っている) の開発の一段階として重要であり、また32ビットパソコンの普及が確実視されている今日、パソコンでの数値解析の実行が日常化することが予想され、FEM をパソコン用に検討しておくことも有用である。

著者らはこれらの観点から FEM 解析と共に、現在の16ビットパソコンでも実用的解析を遂行できると思われる FEM ズーミング解析<sup>7)</sup>について、片持ちばりの変形を解析対象に16ビットパソコンで解析を実行し、二・三の知見を得たので報告する。

なお、16ビットパソコンとしては PC-9801 m2 を使用し、FORTRAN コンパイラとしては PC-FORTRAN を用いた。

## 2. 片持ちばりの FEM 解析

### 2.1 片持ちばりの解析モデル

解析対象として、図1に示す長さ80mm、高さ60mm、単位厚さの片持ちばりを採用し、その材料定数を縦弾性係数  $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$  とする。本問題を通常の三角形定ひずみ要素による有限要素法<sup>8)</sup>で平面応力問題として解析する際、図2に示す4つの方法で三角形要素に分割し解析する。各場合とも要素数は96、節点数は63である。固定端上の節点では長さ、高さ両方向変位とも零とし、自由端にかかる高さ方向荷重は等分布荷重として自由端上の節点に配分した。

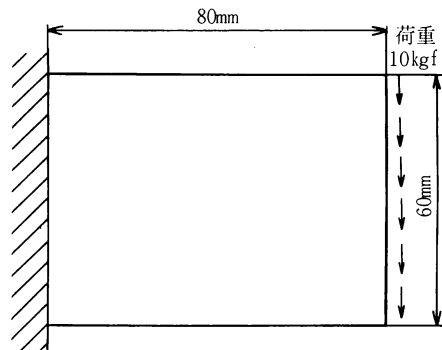


図1 自由端に荷重をうける片持ちばり

荷重が10kgfのときの各要素分割における中央断面のたわみ曲線を図3に示す。曲げによるたわみにせん断変形によるたわみを重ね合わせた材料力学のはりの理論解<sup>9)</sup>も同図に併記した。要素分割(A)～(C)のたわみ曲線は本図ではほとんど判別できぬほど近い結果になるので一本の曲線で表わしたが、要素分割(D)の結果は他の要素分割法に比較して最もはりの理論解に近く、割合良く (最大たわみの誤差は約5%) はりの理論解と一致しているといえる。たわみ曲線つまりは変位の値は要素分割数の影響が大きく、後に要素分割数を増加すればさらに両結果は近づくことがわかるが、要素分割法としては図2の(D)が最も良く、以後本研究では要素分割(D)によって解析を進める。

### 2.2 多元連立一次方程式の解法

多元連立一次方程式を解く手法<sup>10)</sup>は、大別すれば Gauss の消去法 (掃き出し法) から進展して来た直接法と、逐次近似解を修正し反復計算で解を求める間接法 (反復法) に分けられる。FEM 解析では問題が節点変位を未知数とする大次元の連立一次方程式を解くことに帰着されるため、その解法が記憶容量、計算時間に占める影響は大きい。そこで本研究では FEM 解

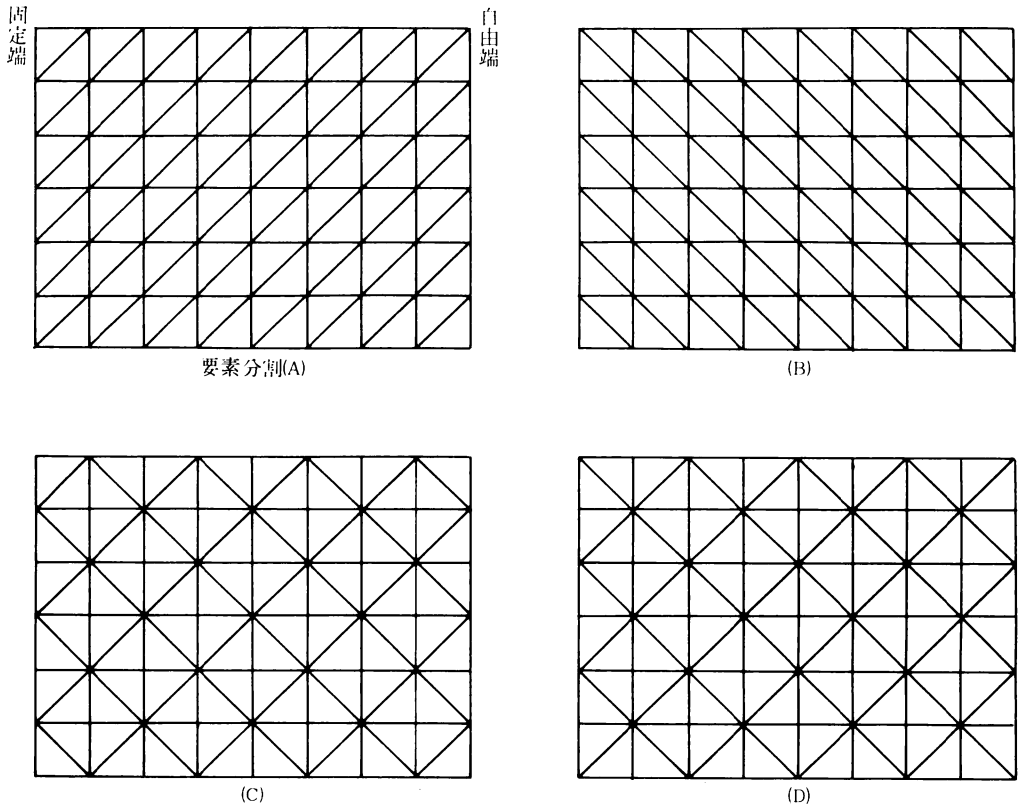


図2 4つの要素分割方法

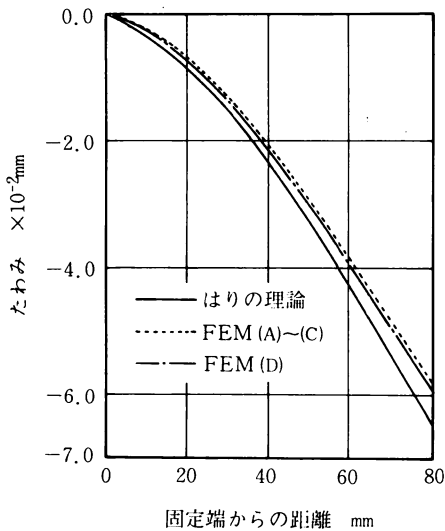


図3 はりの中央断面のたわみ曲線

析における剛性マトリックスの性質も考慮して次に列挙する各解法を試用した。

- (1) Gauss-Seidel 法(間接法)
- (2) Gauss-Jordan 法 (以下直接法)
- (3) Gauss の消去法によるバンドマトリックス法
- (4) Gauss の消去法による対称バンドマトリックス法
- (5) 変形 Cholesky 法による対称バンドマトリックス法

現在 FEM 解析プログラムのほとんどは直接法を採用しており、著者らの経験でも特別に精度が問題になったり、あらかじめ近似解が得られているとき以外は直接法が有効であるという結果を得ている。そこで比較と資料に供するために間接法はその代表的なもの 1

| 解 法     | (1)  | (2)      | (3)   | (4)   | (5)   |
|---------|------|----------|-------|-------|-------|
| 8087 使用 | 46分  | 2 分48.2秒 | 26.8秒 | 20.2秒 | 20.0秒 |
| 8087不使用 | 117分 | 5 分20.4秒 | 45.8秒 | 31.2秒 | 35.3秒 |

- (1) Gauss-Seidel 法
- (2) Gauss-Jordan 法
- (3) Gauss の消去法によるバンドマトリックス法
- (4) Gauss の消去法による対称バンドマトリックス法
- (5) 変形 Cholesky 法による対称バンドマトリックス法

表1 多元連立一次方程式の各解法に対する所要計算時間

つだけを試用した。

表1に上記の各解法によって、前節のFEM解析を遂行したときの所要計算時間を8087コープロセッサの使用、不使用と共に示す。FEM解析において必要な初期値はフロッピーディスクから読み込み、解析結果は同様にフロッピーディスクに出力するという全実行プログラムの正味実行時間を表1に示しており、前節の図3の結果は変形 Cholesky 法による対称バンドマトリックス法を用いたものであるが、他の解法でも同様な値を得ている。本例はマトリックスの対称性やバンド性を利用しない解法でも解くことを念頭においたため、要素分割数を少なく設定しているが、対称バンドマトリックスに対する直接法を用いれば自由度126のFEM解析が20秒で実行できることがわかる。以下本研究では変形 Cholesky 法による対称バンドマトリックス法を多元連立一次方程式の解法として採用する。なお本解法のサブルーチンの所要実行時間は8087コープロセッサを使用して4.3秒、不使用で16.1秒であった。

### 3. 片持ちばりのFEMズーム解析

#### 3.1 ズーム解析の概要

FEMズーム解析<sup>7)</sup>とは、まず大局的な応力分布などを計算し、その結果を用いて局所的な応力分布などの計算を段階的に行なうFEM解析の方法であり、構造物の局部応力の把握などに用いられている。

原理は次のとおりである<sup>11)</sup>。

解析対象をまず粗い要素分割で計算し、つぎに目的とする局部を含む適当な領域を切り出して、さらに細かい要素分割を行ない、前段階の計算から得られる境界の節点変位あるいは境界の節点力(もとの解析対象を切断した場合の反力)を与えて計算を行なう。この手順をつぎつぎと進めてゆくと局部の応力分布などが求められる。本研究では境界の節点変位を与えて計算する解析を節点変位ズーム解析、境界の節点力を与えて計算する解析を節点力ズーム解析と記述する。

#### 3.2 ズーム解析

前章の図1で示した片持ちばりの問題を通常のFEM解析、節点変位ズーム解析、節点力ズーム解析の三手法で解析する際、それぞれを次のように実施した。

##### 通常FEM解析

図4に示すような細かい要素分割で2.1節と同様な方法で実行した。このとき要素数は384、

節点数は221である。

### 節点変位ズーム解析

図5(a)に示すように、まず0ステップとして固定端側長さ20mmの間を4等分割、残り60mmの間を4等分割し、高さ方向には図4同様に12等分割する。図2の要素分割(D)の要領で三角形要素に分割し、自由端の節点に荷重を負荷し解析する。(図5及び次の図6では簡単のため高さ方向の要素分割の繰り返しを省略している。)次に1ステップとして、自由端から60mmの長さのみを解析対象として図5

(b)のように分割し、再び解析を行なう。このとき解析条件として、固定端に最も近い13個の一連の節点には0ステップでの同じ節点の解析結果である節点変位を既知数として与える。2ステップでは同様に1ステップでの節点変位を解析条件として与え解析する。

### 節点力ズーム解析

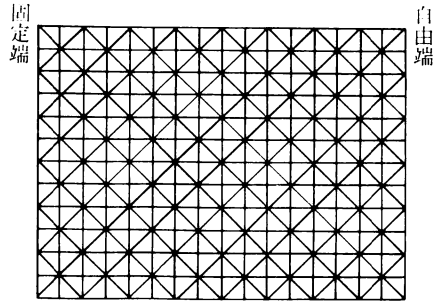
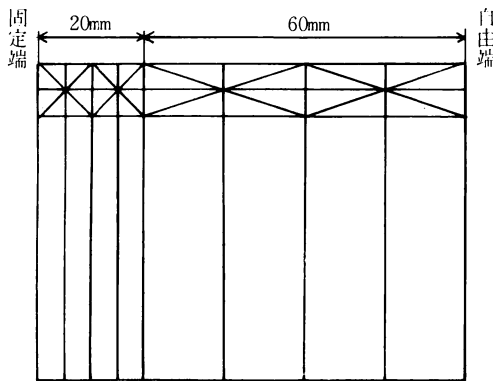
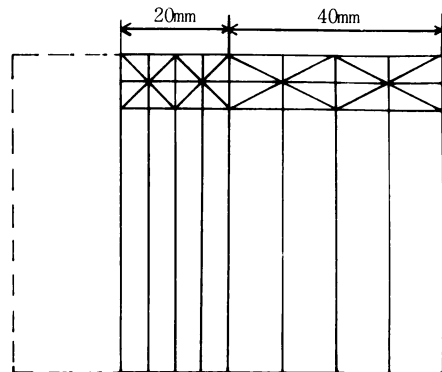


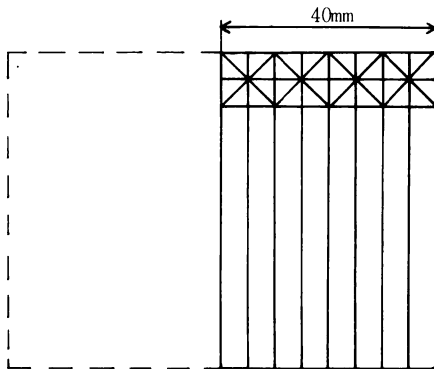
図4 片持ちばりの細かい要素分割



(a) 0ステップ

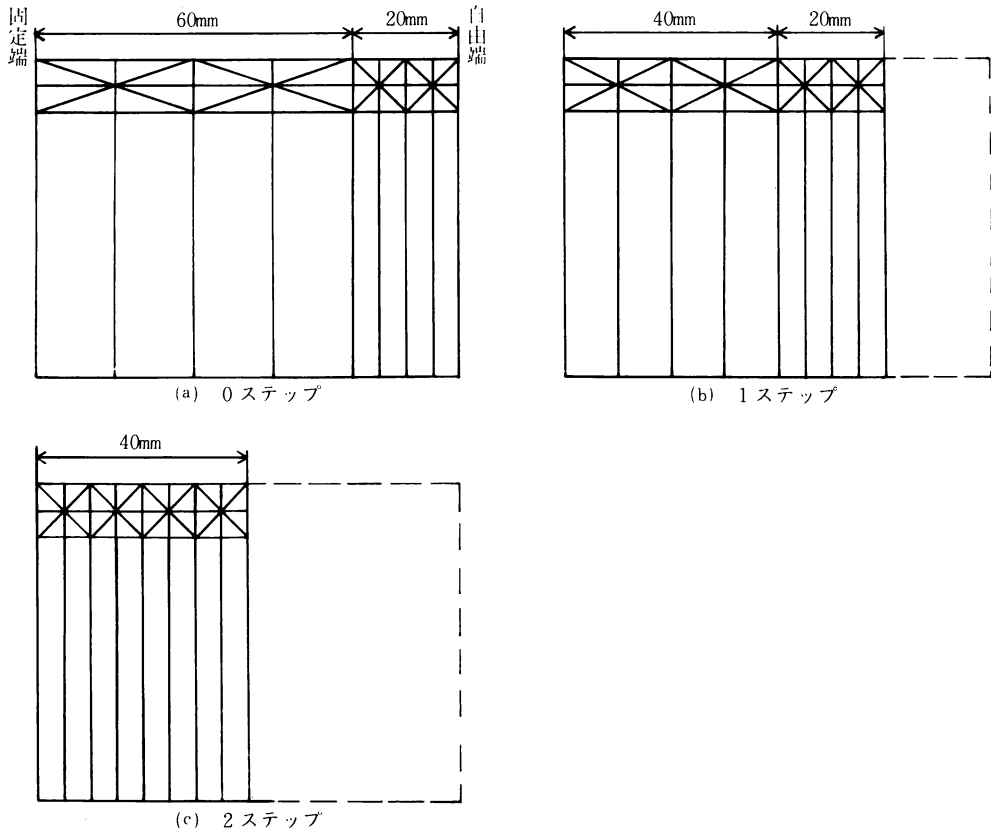


(b) 1ステップ



(c) 2ステップ

図5 節点変位ズーム解析のステップ



・ 図6 節点力ズーム解析のステップ

図6に示すステップで、節点変位ズーム解析と同様に行なうが、各ステップにおいて自由端側の要素がなくなり、前ステップでそれらの要素の存在によって生じていた節点力の反力つまりはその節点力の符号を変えたものを対応する節点の既知節点力として解析する。

ズーム解析においては、各ステップにおける要素数はすべて192、節点数は117であり、ズームを継ぎ合わせた結果は図4の通常のFEM解析の細かい要素分割に一致するようにしている。

### 3.3 解析結果

ズーム解析で片持ちばりの中央断面のたわみを求める場合には、固定端がたわみ零で基準であるため、図5の節点変位ズーム解析のように固定端側の要素をなくし、ステップごとに自由端側の値を求めてゆくべきであるが、節点力ズーム解析において同様な手順を実行したが合理的な結果が得られなかった。その原因には、粗い要素分割で得られた節点力（の反力）の値が細かい要素分割における値と異なること及び計算誤差の二点が考えられる。つまり節点力ズーム解析では、図5の1ステップ、2ステップで外力と節点力が解析条件として与えられるため、はりが中釣りの状態で与えた外力と節点力が厳密に釣り合っている必要が

生じるが、それが上記二点の原因で満たされていないと考えられる。そこで本研究では図6に示すステップで節点力ズーム解析を行ない、各ステップで求められた細かい要素分割部分の中央断面のたわみを全ステップ終了後、固定端側から順に継ぎ合わせて全体の中央断面のたわみを求めた。

図7に通常のFEM解析と二つのズーム解析によるたわみ曲線の計算結果を示す。要素分割数を多くしたため、図3の結果に比べてはりの理論解とFEM解析の結果は近づいている。通常のFEM解析と節点変位ズーム解析の両結果は本図では判別できぬほど一致した。節点力ズーム解析結果のたわみが少な目なのは、中央断面のたわみを継ぎ合わせてゆくときにはりの横断面の傾きを考慮していないためであると思われるが、その差は小さいことがわかる。

所要計算時間はプログラムの内容にもよるので参考として報告すれば、データ・結果のフロッピーディスクとのアクセスタイムも含めて8087コプロセッサを用いれば、通常のFEM解析で1分25秒、節点変位ズーム解析で2分1秒、節点力ズーム解析で2分12秒であった。ズーム解析では各ステップごとに結果をフロッピーディスクに書き込み、次ステップのデータを読み込むために約30秒かかっているため、純粋な計算時間は1分30～40秒である。純粋な計算時間で比較した場合、FEM解析を3回実行しているズーム解析の方が通常のFEM解析の3割～4割増の計算時間で治まっているのは、各ステップにおける要素数及び節点数が半減しているため、主として多元連立一次方程式の解法に必要な時間が大幅に軽減された結果であると思われる。

実際にズーム解析を行なうときは各ステップごとにデータの作成時間が必要なため、純粋な計算時間以外の作業時間が増加することが予想されるが、一方各ステップごとの要素数が削減できるため作業が簡便であるという利点があり、パソコン用のFEM解析の手法として有用であると思われる。

本研究では通常のFEM解析の結果と比較するために、ズーム解析での要素数及び節点数はパソコンとしても余裕のある範囲で行なったが、それでも節点の全自由度442のFEM解析と同程度の結果を2分余りで得ることが実証された。このことは同程度のステップ数とズーム解析方法で、各ステップの要素数及び節点数を本例の通常のFEM解析程度にすれば、節点の全自由度で1000前後つまり節点数で500前後の解析結果をパソコンで、しかも表1の結果もあわせ推測すれば数分の計算時間で得られることを示唆している。さらにこの解析規模は普通には大型から中型の計算機で行なわれている実用問題の規模であることから、ズーム解析を行なうことにより余り大きくない問題ではCADのワークステーションでFEM解析が可能であ

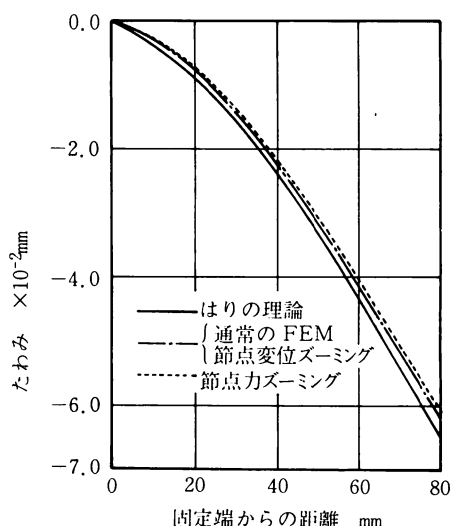


図7 FEMズーム解析による  
片持ちばりのたわみ曲線

ることを示唆している。

#### 4. 結言

16ビットパソコンで FORTRAN コンパイラを使用することにより FEM 解析を遂行した。そのとき片持ちばりの変形を解析対象として採用したが、種々な三角形要素への分割方法と多元連立一次方程式の解法について、計算精度と計算時間の面から考察し、それぞれで有効な方法を確定した。

続いて同じ問題を通常の FEM 解析、節点変位ゾーミング解析、節点力ゾーミング解析の三手法で解析し、結果を考察することにより16ビットパソコンでも、ゾーミング解析を行なうことにより大型もしくは中型計算機並の FEM 解析結果が得られることを示した。

ゾーミング解析がその基礎になる FEM の解法を選ばず、計算機の容量も選ばぬことは概要から明らかであり、本研究結果から見てもミニコンや大型計算機でもその容量を倍化して利用できる有効な手法であることがわかる。

しかし多元連立一次方程式における係数マトリックスの記憶方法、ゾーミング解析のステップ数とその方法などを改良することによりさらに大規模な問題に適用できる可能性があり、計算誤差の軽減と共に今後の課題として研究したい。

#### 謝辞

本研究の基礎になる資料を残して下さった、当時大阪府立大学学生（現ダイキン工業株式会社勤務）大久保峯夫君に謝意を表します。

本研究費用の一部は昭和60年度産業研究所特別研究費として頂いたものです。記して関係各位に謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, The finite element method in structural and continuum mechanics, (1968), Mc Graw Hill.
- 2) 山田・横内、有限要素法による弾塑性解析プログラミング、(1981)、培風館。
- 3) 山田・奥村・吉永、有限要素法による応力解析とそのマイクロコンピュータ化、生産研究、32-3 (1980)、182。
- 4) 戸川、マイコンによる有限要素解析、(1982)、培風館。  
戸川、続マイコンによる有限要素解析、(1983)、培風館。
- 5) 岩崎、マイコンによる大規模 FEM 解析の試み、機械の研究、35-7 (1983)、827。
- 6) 三好、パソコンによる有限要素解析、シミュレーション、3-3 (1984)、134。
- 7) 安藤・飯田・川井・矢川・菊池、矩形開口を有する円筒殻の応力解析、機械学会講演論文集No.212 (1969)、59。
- 8) 戸川、有限要素法入門、(1974)、78、サイエンス社。
- 9) 太田、新版材料力学、(1970)、94、山海堂。
- 10) 戸川、マトリックスの数値計算、(1982)、オーム社。
- 11) 川井・川島・三本木、コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-7-A 薄板構造解析、(1973)、107、培風館。