

実験による高次リスク回避度の検証 —ブラックスワンに対する反応—

Experimental measurement of higher-order risk aversion
-Reaction to “Black Swan” phenomena-

主任研究員名:尾崎 祐介

分担研究員名:後藤 達也、小川 一仁

1. 査読付き研究雑誌で発表された研究成果

研究成果については二編の論文にまとめる予定である。一編は本研究成果も含めてリスク回避度について理論と実験についてより広い視野に立って分析する論文を執筆する。もう一編は、本研究成果の論文である。いずれの論文も、査読付きの国際学術誌への刊行を目指す。ただし、国際学術誌への刊行には長い時間を要することが一般的であるので、まずはワーキングペーパーにすることで研究成果を公表する。

2. 大学間連携研究組織全体の研究成果の総括

I. 研究成果の概要

本研究組織は、高次を含むリスク回避度を実験により検証するために組織された。本研究のためには、実験に適した理論、それに基づいた実験の設計と実施、そして、実験によって得たデータの解析が必要になる。そのため、本研究課題を遂行するためには、理論、実験、そして実証のそれぞれの専門家が必要になる。そのため、理論の専門家である尾崎、実験の専門家である小川、そして実証の専門家である後藤の三名で研究組織を構成した。もちろん、お互いの専門を補完しながら、三人が協力して全ての研究を進めた。Jindapon and Neilson (2007, 以下ではJNと略する。)が提案した理論的な枠組みを用いて、リスク回避度、下方的リスク回避度の検証を行った。実験による検証の結果、集計化したデータではリスク回避と整合的な意思決定が行われていることを確認した。個人においてもリスク回避と整合的な意思決定が支配的であることを確認したが、それと異なる意思決定を行う被験者も一定数が存在した。今後は指数効用などパラメータを特定してリスク回避度の尺度を推定すること、また下方リスク回避度のデータの整理などが課題として残されている。これらについては、早急に分析を行い、論文としてまとめる。以下で研究について詳細に述べていく。

II. リスク回避、リスク回避度

本研究の前提となるリスク回避とリスク回避度について説明する。これ以降、基本的にいちいち文献を参照せずに、この分野の定評ある研究書である Gollier (2001) だけを挙げておく。最初に、リスク回避の定義を与える。意思決定者がリスク回避であるとは、期待値が零であるノイズリスクを嫌うことであると定義する。つまり、意思決定者の(ノイマンモルゲンシュタイン型)効用関数を u 、初期富を x 、そしてノイズリスクを ε とすると、以下で表される:

$$E[u(x + \tilde{\varepsilon})] \leq u(x).$$

ジェンセンの不等式から直ちにこの不等式は効用関数が凹関数であることと同値であることが分かる。つまり、リスク回避は凹効用関数で特徴付けられる。今後、経済主体をその主体が持つ効用関数で呼ぶ、例えば、効用関数 u を持つ場合は経済主体 u と呼ぶ。次に、リスク回避の比較について定義する。意思決定者 v が u より Arrow-Pratt の意味でよりリスク回避的であるとは、意思決定者 u の嫌う全てのリスクを v も嫌うことであると定義される。つまり、

$$E[u(x + \tilde{\varepsilon})] \leq u(x) \Rightarrow E[v(x + \tilde{\varepsilon})] \leq v(x).$$

これの一つの同値条件が以下で与えられることが知られている：

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} \leq -\frac{v''(x)}{v'(x)}.$$

このため、 $-u''/u'$ は Arrow-Pratt のリスク回避度と呼ばれている。このように特定の問題から離れて、一般的に定義されるリスク回避度の特徴付けを選択理論的特徴付け (choice theoretical foundation) と呼ぶことにする。一方、特定の問題によるリスク回避度の特徴付けを行動的特徴づけ (behavioral characterization) と呼ぶことにする。例えば、一種類の無リスク資産と一種類のリスク資産からなる標準的なポートフォリオ問題 (二基金分離定理が成立している場合には、一般の証券市場の分析においてもこれで十分である。) は以下のように定式化できる：

$$\max_{\alpha} E[u(w + \alpha \tilde{x})].$$

ただし、 w は初期保有量、 \tilde{x} は超過収益を表している。ここで、投資家 $u(v)$ の最適ポートフォリオを $\alpha(u)(\alpha(v))$ で表すと、投資家 v が投資家 u よりも Arrow-Pratt の意味でよりリスク回避的であることは $\alpha(u) \geq \alpha(v)$ と同値である。(ただし、期待超過収益が非負であることを仮定している。非正の時は符号を逆転すれば良い。)

初期保有にリスクがある場合、Arrow-Pratt のリスク回避度は主体間の比較をするには弱すぎるということが知られている。そのため、それよりもより強いリスク回避度が必要になる。Ross がこのような場合について分析を行い、以下のリスク回避度を得ている：

$$-\frac{v''(y)}{v'(x)} \geq -\frac{u''(y)}{u'(x)}, \forall x, y.$$

III. 高次リスク回避、高次リスク回避度

次に高次リスク回避とその比較の尺度である高次リスク回避度について説明する。これらの研究は、近年、非常に盛んに行われているため、包括的なレビューは難しい。そのため、研究の背景と本研究と関連した JN についてだけ説明する。

研究の背景としては、以下の二つを挙げることができる。一つ目は特定の問題を分析する時、高次

リスク回避、また高次リスク回避度が重要な役割を果たすことである。例として、リスクに備える貯蓄である予備的貯蓄の分析が挙げられる。予備的貯蓄では効用関数の三次微分の符号が重要な役割を果たすことがよく知られている。予備的貯蓄動機を持つ主体の効用関数の三階微分は正、 $u''' \geq 0$ 、であることが知られている。効用関数の三階微分が正の時、その主体は慎重 (prudent) であると呼ばれる。また、予備的貯蓄の比較をする慎重度も導入され、 $-u'''/u''$ で与えられる。慎重度が大きい主体ほどより多くの予備的貯蓄を行うことが明らかにされている。他にも、ファイナンスの分野では証券市場で取引できないタイプのリスクであるバックグラウンドリスクを分析する際、高次リスク回避、高次リスク回避度が重要な役割を果たすことが明らかにされてきた。1990年代から盛んに行われてきた一連の研究は、高次リスク、高次リスク回避度の行動的特徴付けを与えてきたと言える。一方、2000年中頃から特定の問題を離れ、高次リスク回避、高次リスク回避度の選択理論的な特徴付けが盛んに行われている。

二つ目は実際のリスクを分析する際に高次リスクが重要な役割を果たすからである。高次リスクは高次積率と密接に関連した概念である。つまり、リスクは分散、三次リスクである下方リスクは歪度、四次リスクは尖度と密接に関連している。例えば、古典的な資本資産価格モデルにおいて、投資家は平均と分散のみを考えて最適なポートフォリオを構築する。これは平均と分散によって完全に特徴付けられる正規分布などの場合は正当化されるが、一般の分布については必ずしも当てはまらない。実際、過去の収益率は正規分布に比べて、裾の広いファットテールであることが知られている。歪度や尖度を投資家の選好に加えた場合、価格モデルの説明力が上がるということが明らかにされている。また、タレブによって書かれた「ブラックスワン」により証券市場における異常値の重要性が認識され、異常値を捉える歪度や尖度の重要性が認識されている。その意味でも、高次リスク回避、高次リスク回避度の研究は重要である。

次に、Jindapon and Neilson (2006)を概観する。JNの概要について述べる。分布関数 F, G を考え、 F が G を第二級確率支配の意味で支配されているとする。この時、凸結合で表される分布関数 $H(\cdot, t) = (1-t)F(\cdot) + tG(\cdot)$ と費用関数 $c(t)$ を考える。この時、以下の最適化問題を考えて、

$$U(t) = \int u(x - c(t)) dH(x, t) \rightarrow \max_t$$

その最適解を $t(u)$ で表す。この時、以下の結果が成立する:

$$t(u) \leq t(v) \Leftrightarrow -\frac{v''(y)}{v'(x)} \geq -\frac{u'(y)}{u'(x)}, \forall x, y.$$

つまり、Rossの意味でよりリスク回避的な意思決定者はより費用を掛けて望ましい確率分布にすることが分かる。さらにJNでは高次の確率支配を用いることで、Rossの高次リスク回避度が特徴付けられることを示している。つまり、 n 次の確率支配を考えると以下の結果を得る。

$$t(u) \leq t(v) \Leftrightarrow -\frac{v^n(y)}{v'(x)} \geq -\frac{u^n(y)}{u'(x)}, \forall x, y.$$

IV. 本研究の概観

以上を踏まえて、本研究について概観する。最初に、先行研究との比較をしながら、二点の貢献を挙げる。

① 効用関数の特定化をせずにリスク回避度の比較ができる点。ほとんどのリスク回避度の実験は効用関数を特定化して分析を行っている。しかし、効用関数の特定化といった場合はリスク許容度が線形となるクラスを意味していることが一般的であり、解析的に扱いやすいなどのメリットがある一方、特定化に依存した結果が多いことも知られている。本研究ではそのような特定化なしで行った数少ない研究の一つである。

② 高次リスク回避度まで実験を拡張できる点。JN の枠組みは一般の高次リスク回避度まで容易に拡張することができる。そのため、本研究も高次リスク回避度の実験が可能になる。近年、Eeckhoudt and Schlesinger (2006) が提案した高次リスクの枠組みを用いた実験が行われている。しかし、この枠組みは(少なくとも大域的な意味では)高次リスク回避度の理論的な特徴付けは行われていない。そのため、高次リスク回避度の実験にも適さない。本研究は高次リスク回避度まで拡張できる数少ない研究の一つである。

次に、簡潔に本研究で行ったことを述べる。

最初に、JN の枠組みのままでは実験を行えないので、実験に適した形に変更する必要がある。その一つに、連続の目的変数 t を離散で分析する必要がある。つまり、 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$ を考えて、以下の結果を示す必要がある。

今、 $t_i, t_{i+1} (\geq t_i)$ と効用関数 u と v を考える。 v は u よりも Ross の意味でよりリスク回避的であるとする。

この時、以下が成立する

- u が t_{i+1} を好む場合、 v も t_{i+1} を好む。
- v が t_i を好む場合、 u も t_i を好む。

この結果を用いることで、JN の理論的な分析を実験により検証することが可能になる。つまり、被験者が t_i と t_{i+1} を続けて比較していった時、最初は t_i を選び、ある段階から t_{i+1} を選ぶ。選択を変更する箇所が被験者のリスク回避度を表している。

次に、実験の設計について説明する。具体的には 10 分割、 $n=10$ として実験を行った。零と等確率で起きる期待値零というもつとも単純な第二次確率支配を考えることで実験を行った。最初に、大阪産業大学の学生によって予備的な実験を行い、そのデータを集計して実験を改良していった。その後、実験設備の整った京都産業大学で本実験を行った。また、データが十分に集まらなかったこともあり、追加の実験を関西大学で行った。

11月16日 京都産業大学

11月19日 京都産業大学

1月23日 関西大学

1月24日 関西大学

被験者がリスク回避と整合的であることは、集計化したデータで考えると t_i を選ぶ被験者が徐々に減少していくことで確かめられる。実際に減少していくことが確かめられたので、少なくとも集計化したレベルでは被験者がリスク回避であることが確かめられた。また、個人のレベルでもリスク回避と整合的な被験者が支配的であることが確かめられた。リスク回避度また、下方リスク回避(度)のデータの整理は現在進行中である。

参考文献

- Eeckhoudt, L. and H. Schlesinger, Putting risk in its proper place, *American Economic Review* 96, 280-289, 2006.
- Jindapon, P. and W. S. Neilson, Higher-order generalization of Arrow-Pratt and Ross risk aversion: A comparative statics approach, *Journal of Economic Theory* 136, 719-728, 2007.

実験による高次リスク回避度の検証—理論—

尾崎 祐介(経済学部)

本研究はリスク回避度の強度を実験で確かめることが目的である。本研究課題は理論、実験、実証の三つに分けることができる。全ての作業は共同で行っているため、個人の研究成果を抽出することはできない。しかし、理論の貢献に対する比率が大きいので、個人の研究成果については理論部分についての成果について説明する。

本研究課題は、Jindapon and Neilson (2007) の提示した比較静学の方法によるリスク回避度の研究に基づいている。彼らは同様の方法を一般化することにより、高次リスク回避度も特徴付けている。この方法でリスク回避度を実験することには、先行研究に比べて以下の長所を挙げることができる。

- 先行研究では特定の効用関数を前提にしているのに対して、この方法では特定化せずに性質を確かめることができる点。
- この方法ではリスク回避度だけではなく、慎重度 (prudence) や自制度 (temperance) などの高次リスク回避度に容易に拡張できる点。
- Arrow-Pratt のリスク回避度ではなく、Ross のリスク回避度の実験ができる点。

二点目と三点目は関連深い。なぜなら、高次リスク回避度の多くは Ross の文脈で特徴付けられているからである。

このように Jindapon and Neilson (2007) の提示した枠組みによる実験は多くの利点を有している。彼らの枠組みを実験に適した形で分析し直したのが、理論における研究成果と言える。具体的には、彼らが選択変数を連続と仮定していた部分を、離散に変更して分析を行った。具体的には、以下のような結果を得た：

費用を掛けてより望ましい確率分布が実現できるような状況を考える。より望ましい確率分布とは第二次確率支配の意味で優越することを意味する。意思決定者は利益と費用を比較してより好ましい状況を実現する。選択肢として $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$ が与えられているとする。 $t_i, t_{i+1} (\geq t_i)$ と効用関数 u と v を考える。 v は u よりも Ross の意味でよりリスク回避的であるとする。この時、以下が成立する

- u が t_{i+1} を好む場合、 v も t_{i+1} を好む。
- v が t_i を好む場合、 u も t_i を好む。

また、それらがリスク回避だけではなく、一般の高次にも拡張できることを示した。このように理論を書き直すことで、Jindapon and Neilson (2007) の枠組みは理論に適した形になった。

実験による高次リスク回避度の検証—実証—

後藤 達也(経済学部)

本研究の目的は、リスク回避度の強度を実験で確かめることである。本研究の内容は、理論、実験、実証の三つに分けることができる。全ての作業は共同で行っているため、個人の研究成果を厳密に抽出することはできない。しかし、私自身の貢献に関しては、専門分野である経済統計および計量経済学と関連した実証に対する比率が大きいいため、実証部分における研究成果を個人の研究成果として報告する。

本研究では、Jindapon and Neilson (2007) が提案したリスク回避度に関する理論的研究に基づいた実験を行った。最初に、大阪産業大学の学生被験者に対して予備的な実験を行い、そのデータを検証して実験計画を改良した。その後、実験設備の整った京都産業大学で本実験を行った。さらに、データの充実を図るため、追加の本実験を関西大学で行った。実験は主にリスク回避度について行われたが、追加で行った関西大学での実験では三次(下方)リスク回避度についても行った。本実験終了後、実験データの集計を行い、グラフによる整理などの記述統計分析により、リスク回避度の強度に関する検証を行った。現状において、一連の実験から得られた直観的な結果は以下の通りである。

- 集計されたデータでは、被験者が全体的にリスク回避と整合的な意思決定を行っていることが確認できた
- 個人のデータでも、被験者の大部分がリスク回避的であり、リスク回避と整合的な意思決定が支配的であることが確認できた
- 個人のデータでは、リスク回避度が極端に小さい場合に起こりうることであるが、全ての実験でよりリスクのあるくじを選択する一定数の被験者が存在した
- 基準となる実験においても、頑健性を確かめる変形の実験においても、実験結果に大差は生じなかった

今後は、一連の実験で得られたデータを用いて、リスク回避度に関する統計的に精緻な検証を行う必要がある。効用関数の特定化を行ったうえで選好パラメータを推定し、リスク回避度を計測することにより、先行研究で得られている結果との比較を行う予定である。また、二項選択モデル(ロジットモデル、プロビットモデル)を用いて、くじの選択行動に反映される被験者のリスクに関する選好に対して、統計的に有意な影響を与えている要因(被験者の性格など)を探索する予定である。さらに、近年多くの研究において、その重要性が認識されている三次(下方)リスク回避度などの高次リスク回避度についても、実験から得られたデータはまだ不十分ではあるが、これらを集計し、整理をしたうえで、可能な範囲で統計的な検証を試みる予定である。

実験による高次リスク回避度の検証—実験—

小川 一仁(関西大学)

本研究はリスク回避度、ならびに高次リスク回避の強度を実験で確かめることが目的である。本研究課題は理論・実験・実証の三つに分けることができる。全ての作業は尾崎准教授、後藤准教授と共同で行っているため、個人の研究成果を明確に抽出することは難しい。この成果報告書では、私の専門分野であり、貢献の大きい実験部分の成果について説明する。

Jindapon and Neilson (2006) が分析した問題では、被験者の期待効用は以下で与えられる:

$$U(t) = \int u(x - c(t)) dH(t).$$

ここで、 $H(\cdot, t) = (1-t)F(\cdot) + tG(\cdot)$ で、 G が F を第二級確率支配の意味で支配する。実験を実際に行うためには、確率分布などを特定化する必要がある。本研究では基準の実験を以下のように特定化した。確率分布 F に対応するのが、確率 50% で 3000 円、確率 50% で 1000 円とした。また、確率分布 G に対応するのが、確率 100% で 2000 円とした。また、費用関数は $c(t) = 1000t$ で与えた。

実験結果の頑健性を確かめるために、費用関数などを変更して実験を行った。複数ある質問のうち、1問をくじで選び、さらに賞金をくじで選択し、その結果に応じて謝金を支払った。

また、(支払いを伴わない)仮想的な実験として、賞金を 100 倍にした実験も行なった。

上述した特定化に基づいて実験を設計した。具体的には、実験の説明書や質問・回答用紙の作成をした。これらを用いて大阪産業大学の学生を対象とした予備実験を数回行い、文書や特定化の微調整を施した。

また、実験本番での注意事項などを確認した。実験は以下のように実施した。

2011年11月16日 京都産業大学経済実験室

2011年11月19日 京都産業大学経済実験室

2012年1月23日 関西大学社会学部

2012年1月24日 関西大学社会学部

最初の二回を京都産業大学で行ったのは、京都産業大学にコンピュータネットワークを完備した経済実験の設備を持っていることが理由である。十分な実験データを集められなかったため、追加のデータを取るために関西大学で追加の経済実験を行った。関西大学では京都産業大学のように専用実験設備がないため、紙と鉛筆で実験を行った。